ഭാരതീയ ഗണിത സൂചിക

An Index to Indian Mathematics

വി. വി. അബ്ദുല്ല സാഹിബ്

കേരള സർക്കാരിന്റെ സാംസ്കാരിക പ്രസിദ്ധീകരണ വകുപ്പിന്റെ
ധനസഹായത്തോടെ പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തുന്നത്.



ഭാരതീയ ഗണിത സൂചിക

കേരളസർക്കാരിന്റെ സാംസ്കാരിക പ്രസിദ്ധീകരണ
കുപ്പിന്റെ ധനസഹായത്തോടെ പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തുന്നത്.

ഭാരതീയ ഗണിത സൂചിക

By

വി.വി.അബ്ദുല്ല സാഹിബ്

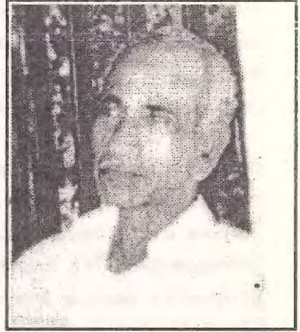
ആദ്യപതിപ്പ് : 2002 ഏപ്രിൽ

കോപ്പി :1000

അച്ചടി : ചാരുത പെരിഞ്ഞനം

വിതരണം: ആശിഖ് ബുക്ക് സെന്റർ, പെരിഞ്ഞനം

വില: ഇരുപത്തഞ്ച് രൂപ



ജീവചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ജനനം 1920. പ്രാഥമിക വിദ്യാഭ്യാസം സ്വദേശമായ പെരിഞ്ഞനം ഹൈസ്ക്കൂൾ. കോളേജ് വിദ്യാഭ്യാസം തൃശ്ശൂരിൽ. 1943ൽ സെന്റ് തോമാസ് കോളേജിൽ നിന്ന് B.A. പാസ്സായി. മലയാളത്തിൽ സംസ്ഥാനത്തിൽ (മദ്രാസ്) രണ്ടാമനായിരുന്നു. കാട്ടൂർ ഹൈസ്സ്കൂളിൽ അദ്ധ്യാപകനായും മദ്രാസ് A.G. ഓഫീസിലും കുറച്ചുകാലം ജോലി നോക്കി. 1945ൽ കസ്റ്റംസ് സെൻട്രൽ എക്സൈസിൽ സബ് ഇൻസ്പെക്ടറായി ചേർന്നു. 1978ൽ സൂപ്രണ്ടായി അടുത്തൂൺ പറ്റി പിരിഞ്ഞു.

സമൂഹം, തത്വശാസ്ത്രം, വേദാന്തം,.ഭൗതികശാസ്ത്രം എന്നീ വിഷയങ്ങളിൽ മുപ്പതോളം ഗ്രന്ഥങ്ങൾ പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. വിസ്തൃതഗോളശാസ്ത്രം എന്ന ബൃഹത്ഗ്രന്ഥം പ്രത്യേകം പ്രസ്താവ്യമാണ്. അറബി കവിതകൾ മലയാളത്തിലേക്ക് വിവർത്തനം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ബഹു ഭാഷാ പണ്ഡിതനും, പ്രാസംഗികനുമാണ്. വായനയും എഴുത്തും പ്രസംഗവും തുടർന്നുകൊണ്ടിരിക്കുന്നു.

വിലാസം :

വി. വി. അബ്ദുല്ല സാഹിബ് ബി.എ.

വലിയകത്ത് വീട്

പി. ഒ. പെരിഞ്ഞനം, തൃശ്ശൂർ. പിൻ 680 686

ആമുഖം

ചെറുപ്പം മുതലേ കണക്കിൽ തൽപ്പരനായിരുന്നു. പ്രൈമറി ക്ലാസ്സിലായിരിക്കുമ്പോൾ ഉയർന്ന ക്ലാസ്സിലെ കണക്കുകൾ ചെയ്യുമായിരുന്നു. വിദ്യാർത്ഥിയെന്ന നിലയിൽ കണക്ക് എനിക്ക് ഒരു 'ഭാര'മായിരുന്നില്ല. S.S.L.C. പരീക്ഷയിൽ 100% മാർക്ക് വാങ്ങുകയുണ്ടായി. എന്റെ സഹപാഠിക്ക് ഞാൻ കണക്കിൽ ട്യൂഷൻ കൊടുത്തിരുന്നു. കോളേജിലും ഐച്ഛികവിഷയം കണക്കുതന്നെ.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലുള്ള വാസന ആവേശമായിത്തീർന്നു. എൺപതുകഴിഞ്ഞ എനിക്ക് ഇപ്പോഴും ആ ശാസ്ത്രത്തിലുള്ള താൽപ്പര്യത്തിന് കുറവ് സംഭവിച്ചിട്ടില്ല. ഔദ്യോഗികജീവിതകാലത്ത് എന്റെ സ്നേഹിതന്മാരുടെ സന്താനങ്ങൾക്ക് ഞാൻ കണക്ക് അദ്ധ്യാപനം ചെയ്യുമായിരുന്നു. വരുമാനത്തിനല്ല; പഠിക്കുന്നവരെ പഠിപ്പിക്കുകയെന്നത് എനിക്ക് ആനന്ദകരമായ ഒരനുഭൂതിയായിരുന്നു. ഇന്നും ഞാൻ കണക്ക് പഠിക്കുന്നു; തായാദികളെ പഠിപ്പിക്കുന്നു.

ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രഗ്രന്ഥങ്ങളിലൂടെ എനിക്ക് ഭാരതീയഗണിതശാസ്ത്രലോകത്തിലേക്ക് പ്രവേശനം ലഭിച്ചു. ലീലാവതി, യുക്തിഭാഷ മുതലായ ഗണിതശാസ്ത്രഗ്രന്ഥങ്ങൾ വായിച്ചപ്പോൾ ഞാൻ ആനന്ദത്തിലാറാടുകയായിരുന്നു. കോളേജിൽ ആംഗലഭാഷയിൽ പഠിച്ച ഗണിതശാസ്ത്രപാഠങ്ങളെല്ലാം ഉൽകൃഷ്ടമായ രീതിയിൽ സംസ്കൃതഭാഷയിൽ കണ്ട ഞാൻ അത്ഭുതപ്പെടുകയും ഭാരതീയരായ നമ്മുടെ പ്രപിതാമഹന്മാരുടെ വൈജ്ഞാനികൗന്നത്യത്തിന് മുമ്പിൽ നമ്രശിരസ്കനാകുകയും ചെയ്തു.

ആംഗലഭാഷയിലുള്ള ദീർഘമായ ഉപപാദ്യങ്ങളും സിദ്ധാന്തങ്ങളും സംസ്കൃതത്തിൽ പദ്യരൂപമായി രസമായി പ്രകാശിപ്പിച്ചിട്ടുള്ളത് വായിച്ചു ഞാൻ അത്ഭുതസ്തബ്ധനായിട്ടുണ്ട്. സത്യം പറയട്ടെ ശ്രുതിമധുരമായ ഗാനങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചു കേൾക്കുന്ന താൽപര്യത്തോടെ, ഈ ഗണിതസിദ്ധാന്തശ്ലോകങ്ങൾ ഞാൻ ആവർത്തിച്ചു വായിച്ചു ഏകാന്തതയിൽ രസിച്ചിരിക്കുക പതിവാണ്.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലൂടെ ഞാൻ അനുഭവിക്കുന്ന ആത്മനിർവൃതി അവാച്യമാണ്. അത് മറ്റുള്ളവരുമായി പങ്കിടുവാൻ എനിക്ക് താൽപര്യമുണ്ട്. വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഗണിതവാസനക്ക് മൂർച്ചകൂട്ടാനുദ്ദേശിച്ചുകൊണ്ടുള്ളതാണ് "ബുദ്ധിയും യുക്തിയും കണക്കിലൂടെ" യെന്ന എന്റെ പുസ്തകം. നമ്മുടെ പൂർവ്വീകർ, മറ്റുശാസ്ത്രങ്ങളിലെന്നപോലെ, ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ എത്രമാത്രം അവഗാഹം നേടിയിരുന്നു എന്ന വസ്തുത അറിയുന്നവർ വളരെ തുച്ഛമായിരിക്കുമല്ലൊ. വേദനാജനകമായ ആ അവസ്ഥക്ക് മാറ്റം വരുത്തേണ്ടത് ആവശ്യമാണെന്ന് എനിക്ക് തോന്നി. അഭ്യസ്തവിദ്യരുടെ അറിവിന്നായി അൽപ്പം ചില പ്രാഥമിക ഗണിതപാഠങ്ങൾ മാതൃകക്കായി പലയിനത്തിൽ നിന്നും തെരഞ്ഞെടുത്തു സമാഹരിച്ചതാണ് 'ഭാരതീയ ഗണിത്സൂചിക'.

കേരള സർക്കാരിന്റെ സാംസ്കാരിക പ്രസിദ്ധീകരണവകുപ്പ് ഈ കൊച്ചുഗ്രന്ഥം അംഗീകരിക്കുകയും അതിന്റെ പ്രചരണത്തിന് വേണ്ടി സാമ്പത്തിക സഹായം നൽകുകയും ചെയ്തിരിക്കുന്നു. സർക്കാരിനോട് എനിക്കുള്ള കടപ്പാട് നന്ദിപൂർവ്വം ഇവിടെ രേഖപ്പെടുത്തിക്കൊള്ളുന്നു.

ഗണിതശാസ്ത്രതൽപ്പരന്മാർ ഈ പുസ്തകം വിജ്ഞാനപ്രദവും ആനന്ദദായകവുമായിക്കാണുമെന്ന് വിശ്വസിക്കുന്നു.

പെരിഞ്ഞനം (തൃശ്ശൂർ)
01.11.2001

ഗ്രന്ഥകർത്താവ്

ഭാരതീയ ഗണിത സൂചിക

ഭാരതം പുരാതനകാലം മുതൽ ഒരു സംസ്കാരകേന്ദ്രമായിരുന്നു. വേദോപനിഷത്തുക്കൾ ഈ വസ്തുത തെളിയിക്കുന്നുണ്ട്. ശാസ്ത്രസാങ്കേതിക വിജ്ഞാനത്തെ സംബന്ധിച്ച പരാമർശങ്ങൾ ഈ ഗ്രന്ഥങ്ങളിലുണ്ട്.

കണക്കിലും ഗോളശാസ്ത്രത്തിലും ബി.സി. ആറാം ശതകത്തിൽത്തന്നെ ഭാരതം അത്യുന്നതസ്ഥാനത്തെത്തിയിരുന്നു. സംസ്കൃതഭാഷയിൽ മറഞ്ഞുകിടന്നു തിളങ്ങുന്ന ആ വിജ്ഞാനഭണ്ഡാകാരത്തെക്കുറിച്ച് ഇന്ന് ഭാരതീയർക്ക് പൊതുവിൽ യാതൊരു ധാരണയുമില്ല. ഭാരതം വിദേശീയർക്ക് കീഴ്പ്പെട്ടതോടുകൂടി സംസ്കൃതഭാഷ നിർജ്ജീവമായി. ഗുരുകുലവിദ്യാഭ്യാസ സമ്പ്രദായം നിലച്ചതോടെ ആ ആഢ്യഭാഷ മൃതപ്രായമാവുകയും അതിലടങ്ങിയ വിജ്ഞാനങ്ങൾ വിസ്മൃതമാവുകയും ചെയ്തു.

ഇന്ന് സ്കൂൾ, കോളേജുകളിൽ പഠിപ്പിക്കുന്ന ഗണിതശാസ്ത്രതത്വങ്ങളെല്ലാം ഇംഗ്ലീഷ് ഭാഷയിലായതുകൊണ്ട് അതെല്ലാം പാശ്ചാത്യരുടെ കണ്ടുപിടുത്തമാണെന്ന് നാം മിക്കവാറും ധരിച്ചിരിക്കയാണ്. യാഥാർത്ഥ്യം അങ്ങനെയല്ല. പല ശാസ്ത്രസിദ്ധാന്തങ്ങളും യൂറോപ്യന്മാർ കണ്ടെത്തുന്നതിന്ന് എത്രയോ മുമ്പ് - നൂറ്റാണ്ടുകൾക്കു മുമ്പ് - ഭാരതീയർ കണ്ടുപിടിക്കുകയുണ്ടായിട്ടുണ്ട്. അക്കാലത്ത് ഭാരതത്തിലെഴുതപ്പെട്ട ഗ്രന്ഥങ്ങളെല്ലാം ആഢ്യഭാഷയായ സംസ്കൃതത്തിലായിരുന്നു. നാം ആ ഭാഷ കൈവിട്ട സ്ഥിതിയാണ് ഇന്ന് നിലനിൽക്കുന്നത്. ആയതിനാൽ ആ ഭാഷയിൽ എന്ത് മാത്രം എത്ര മാത്രം മഹത്തരമായ സിദ്ധാന്തങ്ങളാണ് നിക്ഷിപ്തങ്ങളായിരിക്കുന്നതെന്ന് നാം അറിയുന്നില്ല. സ്വദേഹം കാണാത്ത ആനയെപ്പോലെ നാം നമ്മുടെ ഔൽകൃഷ്ട്യം മനസ്സിലാക്കാതെ ശുഷ്കിച്ചിരിക്കയാണ്.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ എല്ലാ ശാഖകളിലും ഗോളശാസ്ത്രത്തിലും നമ്മുടെ പൂർവ്വികർ അദ്വിതീയരായിരുന്നു. പാടീഗണിതം (പലകയിലെഴുതി പഠിക്കൽ) ധൂളീഗണിതം (തറയിൽ വിതറിയ പൊടിയിലെഴുതി പഠിക്കൽ) ശുൽബഗണിതം (ചരടു കൊണ്ടളന്നുള്ള പഠനം) എന്നീ പേരുകളിലറിയപ്പെട്ടിരുന്ന ഗണനങ്ങളിലൂടെ സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം, വർഗ്ഗം, വർഗ്ഗമൂലം, ഘനം, ഘനമൂലം എന്നീ പരികർമ്മാഷ്ടകം അവർ അഭ്യസിക്കയും അഭ്യസിപ്പിക്കുകയും ചെയ്തുകൊണ്ട് നമ്മുടെ പൂർവ്വീകന്മാർ ശാസ്ത്രസേവനം ചെയ്തിരുന്നു.

കേരളീയരായ ധാരാളം ജ്യോതിശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരും ഗണിതവിദഗ്ദ്ധന്മാരുമുണ്ട്. ധാരാളം ഗ്രന്ഥങ്ങൾ അവരാൽ വിരചിതമായിട്ടുമുണ്ട്. പല ഗ്രന്ഥങ്ങളും കണ്ടെത്താൻ കഴിഞ്ഞിട്ടില്ല. മറ്റു ഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ അവയുടെ സൂചനയോ അവയിൽ നിന്നുള്ള ഉദ്ധരണമോ കാണുന്നത് വഴി ആ ഗ്രന്ഥങ്ങളെക്കുറിച്ച് കേട്ടറിയാനിടയാകുകയാണ്.

ആര്യഭടൻ, ബഹ്മദത്തൻ, ഭാസ്കരൻ 1, ഭാസ്കരൻ 2, കേളല്ലൂർ നീലകണ്ഠസോമയാജി, പരമേശ്വരൻ, മാധവൻ, ഗോവിന്ദസ്വാമി, ജ്യേഷ്ഠദേവൻ എന്നിവർ അറിയപ്പെടുന്ന കേരളീയ ഗണിതശാസ്ത്ര പടുക്കളാണ്.

ആര്യഭടന്റെ *'ആര്യഭടീയം'* സുപ്രസിദ്ധമാണ്. ഇന്ത്യയിലെ മിക്ക ഭാഷകളിലും അതിന് വ്യാഖ്യാനം എഴുതപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. പാശ്ചാത്യഭാഷകളിലേക്ക് അത് പരിഭാഷപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട് എന്ന വസ്തുത അതിന്റെ മഹത്വം വിളംബരം ചെയ്യുന്നു. കൊടുങ്ങല്ലൂർ സ്വദേശിയായ (അല്ലെങ്കിൽ തൃശൂരിലെ പൂകുന്നത്തുകാരനായ) ആര്യഭടൻ ക്രിസ്ത്വബ്ദം 5-ാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ അന്ത്യത്തിൽ തന്റെ ഇരുപത്തി മൂന്നാം വയസ്സിലാണ് ആ വിശ്വപ്രസിദ്ധഗ്രന്ഥം രചിച്ചത്. ഭൂമിയുടെ ചലനത്തെക്കുറിച്ച് അദ്ദേഹം തന്റെ ഗ്രന്ഥത്തിൽ സൂചന നൽകിയിട്ടുണ്ട് എന്നത് പ്രത്യേകം പ്രസ്താവ്യമാണ്.

'യുക്തിഭാഷ' എന്നൊരു വിശിഷ്ടമായ ഗണിതശാസ്ത്രഗ്രന്ഥം മലയാളത്തിൽ വിരചിതമായിട്ടുണ്ട്. *'ഗണിതന്യായസംഗ്രഹം'* എന്ന പേരിലും അതറിയപ്പെടുന്നു. അതിന്റെ കർത്താവ് ജ്യേഷ്ഠദേവൻ (ന്രി 1500 - 1610) എന്ന പണ്ഡിതനാണ് കണക്കും ജ്യോതിശാസ്ത്രവും അതിൽ പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്. പണ്ഡിതന്മാർ ശ്രേഷ്ഠഭാഷയായ സംസ്കൃതത്തിൽ ഗ്രന്ഥരചന നടത്തിയപ്പോൾ ജ്യേഷ്ഠദേവൻ മലയാളഭാഷയെ തെരഞ്ഞെടുത്തു.

ശാസ്ത്രവിഷയങ്ങൾ മലയാളത്തിലും പ്രതിപാദിക്കാൻ കഴിയുമെന്ന് അദ്ദേഹം അതു വഴി തെളിയിച്ചു. മാത്രമല്ല ***യുക്തിഭാഷ*** സംസ്കൃതത്തിലേക്ക് പരിഭാഷപ്പെടുത്തുകയുണ്ടായി എന്നത് ആ ഗ്രന്ഥത്തിന്റെ ഒരു വിശിഷ്ടതയാണ്.

പല കാര്യങ്ങളിലും ഭാരതീയർ യൂറോപ്യന്മാരുടെ മുന്നിലാണ്. ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ:

1. ***പാസ്കൽ ത്രികോണം*** 12-ാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ് പാശ്ചാത്യർ കണ്ടെത്തുന്നത്. എന്നാൽ പത്താം ശതകത്തിൽ ഹലായുധൻ 'മേരുപ്രസ്താരം' എന്ന പേരിൽ ആ തത്വം വ്യക്തമാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

2. പരിമേയ അളവുകളുള്ള ഭുജങ്ങളോട് കൂടിയ ത്രികോണങ്ങളുടെ നിർമ്മിതി ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ (7-ാം നൂറ്റാണ്ട്) വിവരിക്കുകയുണ്ടായി. പക്ഷെ 7-ാം നൂറ്റാണ്ടുകാരായ ബാച്ചറ്റ്, കൺവീഹേ എന്നിവരുടെ കണ്ടുപിടുത്തമായി അതറിയപ്പെടുന്നു.

3. $Nx^2 + K = Y^2$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള രണ്ടാം ഘാതസമവാക്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാനുള്ള മാർഗ്ഗം ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ കണ്ടെത്തി. ഭാസ്കരൻ അതിനെ പരിഷ്കരിക്കയുണ്ടായി. എന്നാൽ ഇതിന്റെ വിശദാംശങ്ങൾ 1767ൽ ഫ്രഞ്ചുകാരനായ ലഗ്രാഞ്ച്ഷെ നൽകുകയുണ്ടായി. ഇന്നത് ലഗ്രാഞ്ച്ഷെയുടെ പേരിൽ പ്രസിദ്ധമായിരിക്കുകയാണ്.

4. PERMUTATION, COMBINATION സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ആദ്യം

കണ്ടെത്തിയത് ഭാരതീയനായ മഹാവീരനാണ്. അത് ഹെറിഗോന്റെ പേരിൽ പ്രസിദ്ധമാണ്.

5. ഗ്രിഗറി സീരീസ് ($Tan^{-1} x$) എന്ന ഒരു സംഖ്യാശ്രേണി സ്കോട്ട്ലണ്ടിലെ ജെയിംസ് ഗ്രിഗറി (1638 - 1695) എന്ന ഗണകൻ 1671 ലും ജർമൻകാരനായ ജി. ഡബ്ല്യു. ലീബ്നിസ് (1646 - 1716) എന്ന ഗണിതവിദ്വാൻ 1673 ലും പ്രസ്താവിക്കുകയുണ്ടായി. എന്നാൽ അതിന് മുന്നൂറ് കൊല്ലം മുമ്പ് സംഗമഗ്രാമമാധവൻ (1350 - 1410) ആ ശ്രേണികളെപ്പറ്റി വിസ്തരിച്ചിട്ടുണ്ട്. കാൽകുലസ് എന്ന ഗണിതശാഖയുടെ സഹായം കൂടാതെയാണ് മാധവൻ ഇത് കണ്ടെത്തിയത് എന്ന വിശേഷത കൂടിയുണ്ട്.

6. ഭൂമിയുടെ ചലനത്തെപ്പറ്റി സൂചന നൽകിയ ആദ്യത്തെ ശാസ്ത്രകാരൻ ഭാരതീയനായ ആര്യഭടനാണെന്ന് സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലൊ.

7. ല.സ.ഗു (LCM) കണ്ടുപിടിച്ചത് മഹാവീരനാണ്. അദ്ദേഹം അതിന് നിരുദ്ധം എന്ന് സംജ്ഞ നൽകി.

പ്രസിദ്ധമായ പല കേരള ഗണിതശാസ്ത്രകൃതികളും കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. തന്ത്രസമ്പ്രദായവും കരണസമ്പ്രദായവും രണ്ടും സാങ്കേതികമായി അംഗീകരിച്ചവയാണ്. ഈ ഗ്രന്ഥങ്ങൾ. ഇതിനും പുറമെ പുരാണഗ്രന്ഥങ്ങളുടെ വ്യാഖ്യാനഗ്രന്ഥങ്ങൾ വളരെ കണ്ടെടുത്തിട്ടുണ്ട്. കേരളം ആര്യഭടീയപക്ഷക്കാരായതിനാൽ വ്യാഖ്യാനം അധികവും ആര്യഭടീയത്തിന്റേതാണ്. മഹാഭാസ്കരീയത്തിന്റേയും ലഘുഭാസ്കരീയത്തിന്റേയും വ്യാഖ്യാനങ്ങളും കണ്ടുകിട്ടിയിട്ടുണ്ട്. സൂര്യസിദ്ധാന്തവും മഞ്ജുളന്റെ ലഘുമാനസവും അവയുടെ വ്യാഖ്യാനഗ്രന്ഥങ്ങളും കണ്ടെത്തിയ ഗ്രന്ഥങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിലുണ്ട്. ദ്വിതീയഭാസ്കരന്റെ ലീലാവതിയാണ് ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ കേരളത്തിൽ പ്രചാരത്തിലുള്ളത്. ലീലാവതിക്ക് കേരളീയരാൽ ഒരു ഡസനോളം വ്യാഖ്യാനങ്ങൾ എഴുതപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

ഭാരതീയർ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ എത്ര ഉയർന്ന നിലവാരത്തിലാണ് പരിലസിച്ചിരുന്നതെന്നറിയുന്നതിന്ന് ആ ഗണനാ രീതിയുമായി നാം പരിചയപ്പെടുകയും ആംഗലത്തിൽ പഠിച്ച ഗണനാരീതികളുമായി തുലനം ചെയ്യുകയും അനിവാര്യമാണ്. അതിന് സഹായകമാകുംവിധം, നിഷ്പ്രയാസം മനസ്സിലാക്കാവുന്ന ചില ഗണനങ്ങൾ മാത്രം ഇവിടെ ഞാൻ അവതരിപ്പിക്കയാണ്.

പുരാതന ഭാരതത്തിലെ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർ

ഭാരതത്തിലെ ഗണിതശാസ്ത്രം ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടാണ് ആരംഭിക്കുന്നത്. പുരാതനകാലം മുതൽക്ക് തന്നെ ഭാരതീയരുടെ പുണ്യകർമ്മങ്ങൾ ശുഭമു

ഹൂർത്തങ്ങളിൽ നിർവ്വഹിക്കപ്പെടേണ്ടവയാകയാൽ അവരുടെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ജ്യോതിഷവിചാരം അനിവാര്യമായിരുന്നു. ജ്യോതിഷത്തിന്റെ ജീവൻ ശുദ്ധഗണനമാണല്ലൊ. അങ്ങനെയാണ് ഗണനകല ഭാരതത്തിൽ പഴയകാലത്ത് തന്നെ വളരെ ഉയർന്നനിലവാരത്തിലെത്തിയത്.

ക്രിസ്തുവിന് മുമ്പ് 3000 വർഷംവരെ പഴക്കം അവകാശപ്പെടാവുന്ന ഭാരതീയ വേദസാഹിത്യത്തിലും ബി.സി. 2000 വർഷം പഴക്കമുള്ള ബ്രാഹ്മണങ്ങളിലും ബി.സി.1000 വർഷം മുമ്പ് രചിക്കപ്പെട്ടതെന്ന് കരുതപ്പെടുന്ന വാത്മീകി രാമായണത്തിലും അക്കാലത്തെ ഗണിതശാസ്ത്രപുരോഗതിയുടെ സൂചനകളുണ്ട്. അർദ്ധം (പകുതി) ത്രിപാദം (നാലിൽ മൂന്നുഭാഗം) ത്ര്യഷ്ടകം (എട്ടിൽ മൂന്ന് ഭാഗം) ദ്വിസപ്തമം (ഏഴിൽ രണ്ട് ഭാഗം) എന്നീ ഭിന്നിതങ്ങൾ വേദങ്ങളിലുണ്ട്. വസ്തുമാനത്തിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ അളവ് *പരമാണുവാണ്*. അത് ഉദ്ദേശം ഒരിഞ്ചിന്റെ 1.3 കോടിയിലൊരംശമത്രെ. ശതപതബ്രാഹ്മണത്തിലെ പ്രസ്താവപ്രകാരം സമയത്തിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ ഘടകം ഒരു സെക്കന്റിന്റെ പതിനേഴിലൊരംശമായ *പ്രാണമാണ്*.

ഭാരതത്തിലെ അറിയപ്പെടുന്ന ഏറ്റവും പഴക്കമേറിയ ജ്യോതിഷ കൃതിയാണ് വേദാംഗജ്യോതിഷം ലഗധമുനിയാണ് ഈ ഗ്രന്ഥത്തിന്റെ കർത്താവെന്ന് കരുതപ്പെടുന്നു. അതിലെ ഒരു വാക്യം ഇങ്ങനെയാണ്. *'ലഗധമഹർഷി പറഞ്ഞുതന്നതുപോലെ ഞാൻ കാലപത്രത്തിൽ എഴുതുകയാണ്.'* ക്രിസ്തുവിന് മുമ്പ് 13-ാം നൂറ്റാണ്ടിലായിരിക്കണം ഈ ഗ്രന്ഥം രചിക്കപ്പെട്ടത് എന്ന് അയനചലനഗണനത്തിലൂടെ മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയുന്നു. അന്ന് വരെ ലഭ്യമായ എല്ലാ ജ്യോതിഷവിജ്ഞാനവും ഉൾക്കൊള്ളുന്നതാണ് ഈ ഗ്രന്ഥം.

പ്രഗത്ഭരായ പല ജ്യോതിഷഗണനപണ്ഡിതന്മാരും ഭാരതത്തിൽ ജന്മം കൊണ്ടിട്ടുണ്ട്. ആര്യഭടൻ 1, വരാഹമിഹിരൻ, ഭാസ്കരൻ, ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ, ഹരിദത്താചാര്യൻ, മഹാവീരൻ, ആര്യഭടൻ 2, ശ്രീധരൻ, പത്മനാഭൻ, ശ്രീപതി, ഭാസ്കരൻ 2, നാരായണപണ്ഡിതർ, പരമേശ്വരൻ, മാധവൻ, നീലകണ്ഠൻ എന്നിവരാണ് അറിയപ്പെടുന്ന ഗണിതപണ്ഡിതന്മാരിൽ പ്രമുഖരായിട്ടുള്ളവർ. ഇവരിൽ മഹാവീരനും ഭാസ്കരൻ ദ്വിതീയനും പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധേയരാണ്.

മഹാവീരൻ കർണ്ണാടകയിലെ രാഷ്ട്രകൂടരാജാവായ നൃപതുംഗന്റെ കൊട്ടാരത്തിലാണ് കഴിഞ്ഞു കൂടിയിരുന്നത്. അദ്ദേഹം ഒരു ജൈനമതവിശ്വാസിയായിരുന്നു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ രചനയാണ് *ഗണിതസാരസംഗ്രഹം*. സംസ്കൃതഭാഷയിൽ 1100 ശ്ലോകങ്ങളടങ്ങുന്നതാണ് ആ ഗണിതഗ്രന്ഥം. (അതിന്റെ കയ്യെഴുത്ത് പ്രതി ലഭ്യമാണ്). സംഖ്യാപരിവർത്തനം - ചയം (PERMUTATION) സംഖ്യാമിശ്രണം (COMBINATION) എന്ന ശാഖയിൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ കണ്ടെത്തലുകൾ പ്രശംസനീയങ്ങളാണ്. 800 കൊല്ലങ്ങൾക്കുശേഷം മാത്രമാണ് ഈ ഗണിതവിഭാഗം യൂറോപ്പിൽ പ്രത്യക്ഷപ്പെട്ടത്.

ഭാസ്കരൻ ദ്വിതീയൻ കർണ്ണാടകയിലെ ബിജ്ജഡവിഡം (ബീജപൂർ) എന്നിടത്താണ് ജനിച്ചത് എന്ന് കരുതപ്പെടുന്നു. ഇദ്ദേഹത്തിന്റെ കൃതിയാണ് പ്രസിദ്ധമായ *ലീലാവതി*. പേര് കേട്ടാൽ നോവലോ ജീവചരിത്രമോ എന്ന് തോന്നുന്ന ഈ കൃതി ഒരു ഗണിതശാസ്ത്രഗ്രന്ഥമത്രേ. രചയിതാവിന്റെ വിധവയായ പ്രിയപുത്രി ലീലാവതിയുടെ പേരിൽ ഗ്രന്ഥം സമർപ്പിക്കപ്പെടുകയാണുണ്ടായത്. ഗ്രന്ഥമാകട്ടെ അതിബുദ്ധിമതിയായ തന്റെ മകളെ ഗണിതം അഭ്യസിപ്പിക്കുന്നതിന് വേണ്ടി ആചാര്യൻ നിർമ്മിച്ചതാണ്.

*ലീലാവതി*യോട് ബന്ധപ്പെടുത്തി രസകരമായ ഒരു കഥയുണ്ട്. ഭാസ്കരാചാര്യൻ എവിടെ പോകുമ്പോഴും ലീലാവതിയെ കൂടെ കൂട്ടാറുണ്ട്. ഒരിക്കൽ പത്ത് വയസ്സുള്ള മകളേയും കൂട്ടി ആചാര്യൻ രാജസദസ്സിൽ ഹാജരായി. പല വിഷയങ്ങളിലും പ്രഗത്ഭരായ പണ്ഡിതന്മാരും ധനികരായ പ്രഭുക്കളും ഹാജരാവാറുള്ള ആ സദസ്സിൽ പല ചർച്ചകളും നടക്കും. ഈ പ്രത്യേക ദിവസം ധനാഢ്യനായ ഒരു പ്രഭു അദ്ദേഹത്തിന്റെ പര്യടനത്തിൽ കണ്ട ഒരു സംഭവം വിവരിക്കുകയുണ്ടായി. രണ്ടുവിഭാഗം തമ്മിലുള്ള പോരാട്ടമായിരുന്നു അത്. ഇരുഭാഗത്തും ഇരുന്നൂറ് ഭടന്മാർ വീതമുണ്ടായിരുന്നു. രണ്ടുഭാഗത്തുനിന്നും ഓരോരുത്തരായി വന്നു അടരാടി മരിച്ചു വീഴാൻ തുടങ്ങി. അങ്ങിനെ ഈരണ്ടുപേരായി എല്ലാ യോദ്ധാക്കളും മൃതിയടഞ്ഞു. അപ്പോൾ ഇരുഭാഗത്തേയും

പ്രഭുക്കന്മാർ തന്നെ രംഗത്തിറങ്ങി. അവരും യുദ്ധം ചെയ്തു മരിച്ചുവീണു. എന്തിനായിരുന്നു ഈ യുദ്ധമെന്ന് ആർക്കും അറിഞ്ഞുകൂടായിരുന്നു. എനിക്കും അറിഞ്ഞുകൂടാ. പ്രഭു തുടർന്നു. ഈ സദസ്സിലുള്ള ആരെങ്കിലും ആ യുദ്ധം എന്തിനായിരുന്നുവെന്ന് പറഞ്ഞുതന്നാൽ കൊള്ളാം.

ഇങ്ങനെയൊരു യുദ്ധം അസംഭവ്യമാണെന്നും ഇതൊരു കെട്ടുകഥമാത്രമാണെന്നും ഭാസ്കരാചാര്യൻ ഉൾപ്പെടെ സദസ്സിലുള്ള എല്ലാവരും അഭിപ്രായപ്പെട്ടു. എന്നാൽ കഥ പറഞ്ഞ പ്രഭു താനിത് നേരിൽ കണ്ടതാണെന്ന് തറപ്പിച്ചു പറഞ്ഞു. രംഗം നിരീക്ഷിച്ചുകൊണ്ടിരുന്ന രാജാവ് ഒരു തന്ത്രം പ്രയോഗിച്ചു. തർക്കവിഷയത്തെപ്പറ്റി ആചാര്യപുത്രിയായ കൊച്ചുകുട്ടിയുടെ അഭിപ്രായം ആരായാൻ നിശ്ചയിച്ചു. രാജാവ് തന്നെ ലീലാവതിയോട് ചോദ്യം ഉന്നയിച്ചു.

നിശ്ശബ്ദമായ സദസ്സിൽ ലീലാവതി എഴുന്നേറ്റുനിന്നു. ഈ യുദ്ധം സംഭവ്യം തന്നെയാണ്. തത്തുല്യമായ ഒരു പോരാട്ടം ഞാൻ കണ്ടിട്ടുണ്ട്. ഒരേ നീളവും ഒരേ വണ്ണവും തുല്യശക്തിയുമുള്ള രണ്ടുസർപ്പങ്ങൾ തമ്മിൽ പൊരുതുകയുണ്ടായി. ആരും തോൽക്കുന്നില്ലെന്ന് കണ്ടപ്പോൾ അവ പരസ്പരം വാലിൽ കടിച്ചു വിഴുങ്ങാൻ തുടങ്ങി. ഒരു പാമ്പ് മറ്റൊന്നിനെ വിഴുങ്ങിയാൽ വിഴുങ്ങപ്പെട്ടത് അപ്രത്യക്ഷമാകും. മറ്റേത് ശേഷിക്കുമല്ലൊ. എന്നാൽ ഇവിടെ രണ്ടും അന്യോന്യം വിഴുങ്ങിയതിനാൽ രണ്ടു പാമ്പുകളും ഇല്ലാതായി. വിഴുങ്ങൽ മാത്രം അവശേഷിച്ചു. ഇത് സംഭവ്യമാണ്. അതുപോലെത്തന്നെയാണ് പ്രഭുവിന്റെ യുദ്ധക്കഥയും.

സഭയിലുള്ളവരെല്ലാവരും കൈകൊട്ടിച്ചിരിച്ചു. പ്രഭു ഇളിഭ്യനായി. അതീവസന്തുഷ്ടനായ രാജാവ് ലീലാവതിയെ അനുമോദിച്ചു.

ഭാസ്കരന്റെ *സിദ്ധാന്തശിരോമണി*യുടെ ഒരു ഭാഗമാണ് ഈ ഗണിതഗ്രന്ഥമായ ലീലാവതി. 36-ാം വയസ്സിൽ രചിച്ച *സിദ്ധാന്തശിരോമണി*യിൽ ബീജഗണിതവും (അഹഏഋആഞഅ) ഗ്രഹഗണിതവും, ഗോളാദ്ധ്യായവും അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു. അക്ബർ ചക്രവർത്തിയുടെ നിർദ്ദേശപ്രകാരം ഫൈസീ എന്ന വിദ്വാൻ *ലീലാവതി* പേർഷ്യൻ ഭാഷയിലേക്ക് പരാവർത്തനം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ബീജഗണിതമാകട്ടെ പിൽക്കാലത്ത് ഷാജഹാൻ ചക്രവർത്തിയുടെ ഭരണകാലത്ത് അത്താവുള്ള റശീദി എന്ന പണ്ഡിതൻ പേർഷ്യൻ ഭാഷയിലേക്ക് മൊഴിമാറ്റം നടത്തുകയുണ്ടായി. അതിൽ രണ്ടാം നിരസമവാക്യങ്ങൾ (SECOND DEGREE EQUATION) ചാക്രികരീതിയിൽ (CYCLIC METHOD) നിർദ്ധാരണം (SOLVE) ചെയ്യുന്നതിനുള്ള മാർഗ്ഗം വിദഗ്ദ്ധമായ രീതിയിൽ ഭാസ്കരൻ ആവിഷ്കരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഹെർമാൻ ഹെങ്കൽ (ഒഋഞങഅച ഒഅചഗഋഘ) എന്ന സുപ്രസിദ്ധഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഭാസ്കരന്റെ ഈ ക്രിയാപാടവത്തെ അങ്ങേയറ്റം പ്രശംസിക്കുകയുണ്ടായിട്ടുണ്ട്.

ചില സംഖ്യാഗണങ്ങളുടെ (EXPRESSION) വർഗ്ഗമൂലം (SQUARE ROOT) കണ്ടെത്തുന്നതിൽ ഭാസ്കരൻ സ്വീകരിച്ച പ്രത്യേക രീതി വളരെ പ്രശംസനീയമാണ്. 18°, 36° എന്നീ കോണുകളുടെ ജ്യാനം (SINE) വളരെ കണിശമായി ഭാസ്കരൻ തന്റേതായ പ്രത്യേകമാർഗ്ഗത്തിലൂടെ നിർണ്ണയിക്കുകയുണ്ടായി. ഗ്രഹചലനഗണനത്തിൽ അദ്ദേഹം അവലംബിച്ച ഗണനസൂത്രം പിൽക്കാലത്ത് 17-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ലിബ്നീസും (1664 - 1715) ന്യൂട്ടണും (1642 - 1727) ആവിഷ്കരിച്ചെടുത്ത *കാൽകുലസ്* എന്ന ഗണിതശാഖക്കുള്ള ബീജം ഉൾക്കൊണ്ടിരുന്നു എന്ന വസ്തുത അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഗണന നൈപുണ്യം വിളിച്ചോതുന്നുണ്ട്. ഭാസ്കരകൃതികൾക്ക് പിൽക്കാലത്ത് ധാരാളം വ്യാഖ്യാനഗ്രന്ഥങ്ങൾ രചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട് എന്നതും അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഔന്നത്യം വെളിപ്പെടുത്തുന്നു.

14-15 നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ഗണിത പണ്ഡിതനായ പരമേശ്വരൻ ചാക്രിക ചതുർഭുജത്തിന്റെ (CYCLIC QUADRILATERAL) പഠനത്തിൽ കണ്ടെത്തിയ തത്വങ്ങൾ 1782 ലാണ് യൂറോപ്പിൽ ലീഗങ്ങിയർ പുനപ്രഖ്യാപനം ചെയ്തത്. അതുപോലെ പല ഗണിതസിദ്ധാന്തങ്ങളും ഭാരതത്തിൽ പൊതുവിലും കേരളത്തിൽ പ്രത്യേകമായും നമ്മുടെ പൂർവ്വീകർ പ്രസ്താവിച്ചു നൂറ്റാണ്ടുകൾക്ക് ശേഷമത്രേ യൂറോപ്പിൽ അവരുടെ കണ്ടുപിടുത്തമായി പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയത്. ഭാരതത്തിൽ മദ്ധ്യദശയിൽ അറബി -

പേർഷ്യൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരുമായുണ്ടായ സമ്പർക്കത്തിലൂടെ ചില നൂതന തത്വ ങ്ങളും ഗണനരീതികളും അന്യോന്യം ശാസ്ത്രത്തിന് മുതൽക്കൂട്ടായിട്ടുണ്ടെന്നുള്ള യാഥാർത്ഥ്യവും ഈ സന്ദർഭങ്ങളിൽ സ്മരണീയമാണ്.

ഗണിതത്തിന്റെ എല്ലാ ശാഖകളിലും ഭാരതീയർ തൽപരരായിരുന്നുവെന്നു മാത്രമല്ല പ്രശസ്തമായ വിധം അവരുടേതായ വിലപിടിച്ച സംഭാവനകൾ ഓരോ ശാഖക്കും നൽകുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. വ്യക്തഗണിതം (ARITHMATIC), അവ്യക്തഗണിതം (ബീജഗണിതം ALGEBRA), ഗ്രഹഗണിതം (ASTRONOMY), ക്ഷേത്രഗണിതം (GEOMETRY), അതിന്റെ അഞ്ചുശാഖകളായ തലക്ഷേത്രമിതി (PLAIN GEOMETRY), ഘനക്ഷേത്രമിതി (SOLID GEOMETRY), ത്രികോണമിതി (TRIGONOMETRY), ചാപീയ ത്രികോണമിതി (SPHERICAL TRIGONOMETRY) ദീർഘവൃത്തഗണിതം (CONICS ANALYTICAL CONICS) കാൽക്കുലസ് ഭേദസൂചകവും (DIFFERENTIAL) ഉൽഗ്രഥനവും (INTEGRAL) ലോഗരിതം, ബൈനോമിയൽ തിയറം എന്നിവയെല്ലാം നമ്മുടെ മുതൽക്കൂട്ടാണ്. എല്ലാം നമ്മുടെ പുരാതന ഗണിതഗ്രന്ഥങ്ങളിലുണ്ട്. ആര്യഭടന്റെ കൃതിയാണ് ഇന്ത്യയിൽ കണ്ടെത്തിയിട്ടുള്ളതിൽ ഏറ്റവും പഴക്കമേറിയ ഗണിതശാസ്ത്രഗ്രന്ഥം. (അദ്ദേഹം കലി 3577 ൽ പാടലീപുത്രത്തിൽ ജനിച്ചു എന്നും കാണുന്നു. ഭൂഭ്രമണം ആര്യഭടൻ കണ്ടെത്തിയെന്ന് സൂചനയുണ്ട്. അറബികളും ഭാരതീയരും പരസ്പരം സമ്പർക്കം പുലർത്തുകയും അന്യോന്യം ഉപഭോക്താക്കളായിത്തീരുകയും ചെയ്തു വെന്നും മുമ്പേ സൂചിപ്പിച്ചുവല്ലോ. ആര്യഭടീയവും അറബികൾ പഠിച്ചുസ്വായത്തമാക്കിയെന്ന് കരുതേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. അർജ്ജബഹർ എന്ന് അറബിഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ സൂചിപ്പിക്കപ്പെടുന്ന വ്യക്തി ആര്യഭടനായിരിക്കാൻ സാദ്ധ്യതയുണ്ടെന്ന് അഭിജ്ഞന്മാർ അഭിപ്രായപ്പെടുന്നു. അറബികളിൽ നിന്ന് അത് യൂറോപ്പിലേക്ക് സംക്രമിച്ചപ്പോൾ ആ നാമം ആർദുബ്രിയസ് (ARDUBRIUS) എന്നായി ത്തീർന്നുവെന്നും പറയപ്പെടുന്നു. *ഗ്രന്ഥം മൂന്നു പകർത്തുമ്പോൾ മുഹൂർത്തം മൂത്രമായ് വരും* എന്നാണല്ലൊ ശാസ്ത്രം.

ആര്യഭടന്റെ വ്യാഖ്യാതാവായ ഭാസ്കരൻ ദ്വിതീയൻ ഉദാഹരണമായി ഒരു പ്രശ്നം ഉന്നയിക്കുകയുണ്ടായി.

8 കൊണ്ടുഹരിച്ചാൽ 5 ബാക്കി വരുന്നതും
9 കൊണ്ടുഹരിച്ചാൽ 4 ബാക്കി വരുന്നതും
7 കൊണ്ടുഹരിച്ചാൽ 1 ബാക്കി വരുന്നതുമായ സംഖ്യയേത്?

ഇത് *കുട്ടകം* എന്ന പ്രത്യേക വകുപ്പിൽ പെട്ട ഒരു കണക്കാണ്. അതിന്റെ പൊതുരൂപം

$$ax + c = by$$

എന്നാണ്. ഇവിടെ a, b, c എന്നിവയുടെ വില അറിയാം. x, y എന്നിവയുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കണം. ശ്രമകരമായ ഒരു ഗണനസർക്കസ്സാണിത്. മേൽകണക്കിന്റെ ഉത്തരം ച ആണെങ്കിൽ

$$N = 8x + 5 = 9y + 4 = 7z + 1$$
$$N = 85$$

മറ്റൊരുദാഹരണം

2, 3, 4, 5, 6 എന്നീ സംഖ്യകളെക്കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ 1 ബാക്കി വരുന്നതും 7 കൊണ്ടു ബാക്കി വരാതെ ഹരിക്കാവുന്നതുമായ സംഖ്യയേത്?

ഇതും കുട്ടകകുലത്തിൽപ്പെട്ട ഗണനമാണ്.

സാധാരണഗതിയിൽ 2, 3, 4, 5, 6 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ അധമസാധാരണഗുണിതം (LCM) കണ്ടു അതിനോട് 1 ചേർത്താൽ ആ സംഖ്യ ആദ്യലക്ഷണം ഒത്തതായി. അങ്ങിനെ ആ ലക്ഷണമൊത്ത അനേകം സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്താം. അതിൽ ചിലത് മാത്രമേ 7 ന്റെ ഗുണിതമാകയുള്ളു. അത് പരിശോധനകൊണ്ടു കണ്ടെത്തണം. അങ്ങനെ പലസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്താം. എണ്ണമറ്റ സംഖ്യകളുണ്ട്.

2, 3, 4, 5, 6 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ അ.സ.ഗു. (LCM) 60 ആണ്. അതിനോട് 1 ചേർത്താൽ 61. അല്ലെങ്കിൽ 60 ന്റെ ഏത് ഗുണിതത്തോടും 1 ചേർക്കുക. അവ

യെല്ലാം ആദ്യലക്ഷണമുള്ളവയാണ്.

60 x 1 + 1	=	61	60 x 7 + 1	=421
60 x 2 + 1	=	121	60 x 8 + 1	=481
60 x 3 + 1	=	181	60 x 9 + 1	= 541
60 x 4 + 1	=	241	60 x 10 + 1	=601
60 x 5 + 1	=	301	60 x 11 + 1	=661
60 x 6 + 1	=	361	60 x 12 + 1	=721

ഇനി ഈ ആദ്യലക്ഷണമൊത്ത സംഖ്യകളിൽ ഏതെല്ലാം സംഖ്യകൾക്ക് രണ്ടാം ലക്ഷണമുണ്ടെന്ന് പരിശോധിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കണം.

	ഫലം	ശിഷ്ടം		ഫലം	ശിഷ്ടം
$\frac{61}{7}$ =	8	5	$\frac{481}{7}$ =	68	5
$\frac{121}{7}$ =	17	2	$\frac{541}{7}$ =	77	2
$\frac{181}{7}$ =	25	6	$\frac{601}{7}$ =	85	6
$\frac{241}{7}$ =	34	3	$\frac{661}{7}$ =	94	3
$\frac{301}{7}$ =	43	0	$\frac{721}{7}$ =	103	0
$\frac{361}{7}$ =	51	4	$\frac{781}{7}$ =	111	4
$\frac{421}{7}$ =	60	1	$\frac{841}{7}$ =	120	1

ഇങ്ങനെ സംഖ്യകൾ പരിശോധിക്കുമ്പോൾ ഒരു പൊതുസ്വഭാവം ആവർത്തിക്കുന്നത് കാണാം. 7 കൊണ്ടുഹരിക്കുമ്പോൾ ബാക്കി വരുന്നത് 4, 1, 5, 2, 6, 3 എന്നീ 6 സംഖ്യകളുണ്ട്. അടുത്ത സംഖ്യയിൽ ബാക്കി വരുന്നില്ല. വീണ്ടും അടുത്ത ആറ് സംഖ്യകളിൽ 4, 1, 5, 2, 6, 3 എന്നിവ തന്നെ ക്രമത്തിൽ ബാക്കി വരുന്നു. ഏഴാമത്തേതിൽ ബാക്കി വരുന്നില്ല. ഇങ്ങനെ ആറ് സംഖ്യകൾ ഇടവിട്ടാണ് 7ന്റെ ഗുണിതം വരുന്നത് അപ്പോൾ രണ്ടുലക്ഷണങ്ങളും തികഞ്ഞ ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ 301 ആണ്. അടുത്തത്

	301	+	60 x 7	=	721
അടുത്തത്	721	+	60 x 7	=	1141
അടുത്തത്	1141	+	60 x 7	=	1561

ഇങ്ങനെ 420 കൂട്ടിക്കൂട്ടി എണ്ണമറ്റ സംഖ്യകൾ രണ്ടുലക്ഷണങ്ങളും ചേർന്നതായുണ്ടെന്ന് കാണാം. അപ്പോൾ അതിന്റെ പൊതുരൂപം

$$301 + 420n$$

എന്ന് സിദ്ധിക്കുന്നു. n ന് 0, 1, 2 ...... എന്നിങ്ങനെ വില കൽപ്പിച്ച് സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്താം.

A.K. ബേയ്ഗ് എന്ന മുസ്ലീം ഗണിത പണ്ഡിതൻ ചൂണ്ടിക്കാട്ടുന്നു

ഭാസ്കരൻ പ്രഥമൻ കയ്യാളിയ ഈ ഗണന പ്രശ്നം അതിനുശേഷം ഇബ്നുൽഹെത്തം AD 1000 ലിയോടെഫിബോനാച്ചി (1202) 17-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ വേറെ രണ്ടുപേർ - ഇവരെല്ലാം കൈകാര്യം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

അനന്തരം ബേയ്ഗ് ഗ്രഹചലനങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തി ഇത്തരം ഗണനങ്ങളുൾക്കൊള്ളുന്ന ചില പ്രശ്നങ്ങൾ ഉദാഹരണമായി എടുത്തു കാണിക്കുകയും ചെയ്തു.

ആര്യഭടൻ I (476 AD) ഭൂമി ഗോളമാണെന്ന് ധൈര്യസമേതം പ്രസ്താവിക്കുകയുണ്ടായി. ഗോളപാദത്തിൽ ആ പ്രഗത്ഭൻ പറയുന്നു:

ഭൂഗോളഃ സർവ്വതോ വൃത്തഃ

ഭൂമി പരന്നതാണെന്ന് വിശ്വസിക്കുന്ന ഒരു ലോകത്തോടാണ് ഇത് പറയുന്നതെന്നോർക്കണം. പരപ്പൻ ഭൂമി സംഘടന (FLAT EARTH SOCIETY) ഇന്നും ഉണ്ട്. ഭൂമി അനങ്ങാതെ നിൽക്കുകയാണെന്നും ആകാശത്തിലുള്ള ഗ്രഹനക്ഷത്രാദികൾ ഭൂമിയെ ചുറ്റുകയാണെന്നുമുള്ള ധാരണ നിലനിന്നിരുന്ന ആ കാലഘട്ടത്തിൽ ഇത് പറയാൻ നല്ല *നട്ടെല്ല്* വേണം. സൂര്യാഭിമുഖമായ അർദ്ധഭൂമിമാത്രം പ്രകാശിതമാണെന്നും മറ്റേ അർദ്ധഭാഗം അന്ധകാരത്തിലാണെന്നും ധീരമായി പ്രഖ്യാപിച്ച ആദ്യഭാരതീയനത്രെ ആര്യഭടൻ. പക്ഷെ നക്ഷത്രങ്ങൾ സ്വയം പ്രകാശമുള്ളവയല്ലെന്നും അദ്ദേഹം കൂട്ടത്തിൽ പറഞ്ഞു കളഞ്ഞു. കഥ ഇവിടെ അവസാനി ക്കുന്നില്ല അക്കാലത്ത് അസഹ്യവും വിപ്ലവാത്മകവുമായ ഒരാശയവും കൂടി അദ്ദേഹം പ്രഖ്യാപിച്ചു. ഉദയാസ്തമനങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നത് ഭൂഭ്രമണം മൂലമാണെന്ന്; *അചലാനി ഭാനി സമപശ്ചിമഗാനി* (ഗോളപാദം) 7-ാം നൂറ്റാണ്ടിലെ ഗോളശാസ്ത്രപണ്ഡിതനായ ബ്രഹ്മഗുപ്തന്റെ (628) വ്യാഖ്യാതാവായ പൃഥൂദകസ്വാമി (860) ആര്യഭടസിദ്ധാന്തം ശരിവെക്കുകയുണ്ടായി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പ്രസിദ്ധവാനശാസ്ത്രജ്ഞനായ ട്ടോളമിയും (ബത്‌ലിമൂസ്) ഭൂമി അചലമെന്ന അഭിപ്രായക്കാരനായിരുന്നു എന്നോർക്കുക.

ഭാരതീയ ഗണിതം സംസ്കൃതത്തിലാണ്. അതിനൊരു പ്രത്യേകതയുണ്ട്. എണ്ണങ്ങളും സംഖ്യകളും കൃത്യമായി സ്മൃതിപഥത്തിൽ ശേഖരിച്ചുവെക്കാനും ആവശ്യം നേരിടുമ്പോൾ പ്രമാദരഹിതമായി ഉപയോഗപ്പെടുത്താനും എളുപ്പമുള്ള രീതിയിലാണ് സംസ്കൃതത്തിൽ അവ നിബന്ധിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്. എല്ലാ സംഖ്യകളും ശ്ലോകരൂപത്തിൽ രേഖപ്പെട്ടിരിക്കയാൽ ഉരുവിട്ടു മനഃപാഠമാക്കാനും തെറ്റുപറ്റാതെ ആവർത്തിക്കാനും എളുപ്പമാണ്.

ഒരു ഉപാധിയുണ്ട്. ശ്ലോകങ്ങൾ അക്ഷരങ്ങളാണല്ലൊ. സംഖ്യകളെ അക്ഷരങ്ങളാക്കി മാറ്റിയിട്ടാണ് ശ്ലോകം രചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്. വീണ്ടും ആ അക്ഷരങ്ങളെ സംഖ്യകളാക്കി പരിവർത്തിക്കണം. ആ കർമ്മം ഉപയോക്താവ് നിർവ്വഹിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ആകയാൽ ആ അക്ഷരസംഖ്യബന്ധം ആദ്യം അറിഞ്ഞിരിക്കയും പരിശീലിക്കയും ചെയ്യേണ്ടത് അനിവാര്യമാണ്.

കടപയാദി എന്ന സംജ്ഞാനാമത്തിൽ അറിയപ്പെടുന്ന ഒരു സംഖ്യാക്ഷരസമ്പ്രദായമാണ് കേരളത്തിൽ നടപ്പുള്ളത്. ആ സമ്പ്രദായം താഴെ വിവരിക്കുന്നു.

ഭാഷയിലുള്ള സ്വരവ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങൾക്ക് ഒരു വിലകൽപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്. 1 മുതൽ 9 വരെയും പൂജ്യവുമാണ് അക്ഷരത്തിന് കൽപ്പിച്ചിട്ടുള്ളത്. അതിന്റെ പട്ടിക താഴെ കൊടുക്കുന്നു.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ക	ഖ	ഗ	ഘ	ങ	ച	ഛ	ജ	ഝ	ഞ
ട	ഠ	ഡ	ഢ	ണ	ത	ഥ	ദ	ധ	ന
പ	ഫ	ബ	ഭ	മ					
യ	ര	ല	വ	ശ	ഷ	സ	ഹ	ള	ഴറ

ഒരക്കത്തിന്റെ താഴെ കാണുന്ന എല്ലാ അക്ഷരങ്ങൾക്കും ആ അക്കത്തിന്റെ വിലയാണ്. ഒന്ന് മുതൽ അഞ്ച് വരെ വിലയുള്ള നന്നാലക്ഷരങ്ങളും ആറ് മുതൽ ഒമ്പത് വരെ മുമ്മൂന്നക്ഷരങ്ങളുമുണ്ട്. ഒരേ വിലയുള്ള എല്ലാ അക്ഷരങ്ങളേയും കൂട്ടിച്ചേർത്ത് ഒരു വായ്ത്താരുണ്ടാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ഹൃദിസ്ഥമാക്കാനുപയുക്തമായ ആ വായ്ത്താര് ഇങ്ങനെയാണ്

കടപയ	=	1	ചതഷ	=	6
ഖഠഫര	=	2	ഛഥസ	=	7
ഗഡബല	=	3	ജദഹ	=	8
ഘഢഭവ	=	4	ഝധള	=	9
ങണമശ	=	5	ഞന	=	0

വ്യഞ്ജനത്തോട് ഏതു സ്വരം ചേർന്നാലും വിലമാറുകയില്ല. ഉദാഃ കൊ, പൈ, യു - ഇവയെല്ലാത്തിന്റേയും വില 1 തന്നെ. കൂട്ടക്ഷരങ്ങളിൽ ഒടുവിലെ അക്ഷരം പ്രാമാണികം. ഉദാഃ സ്പ = പ = 1; ക്ഷ = ഷ = 6; ല്ലി = ല = 3. അ മുതൽ ഔ വരെ എല്ലാ സ്വരങ്ങളുടേയും വില ശൂന്യം. ഴ, റ എന്നിവയും ശൂന്യം. ൽ, ർ, ൾ, ൺ, ൻ എന്നീ ചില്ലുകൾക്ക് വിലയില്ല. റ തനിച്ചു കണ്ടാൽ ശൂന്യം; കൂട്ടക്ഷരത്തിന്റെ ഒടുവിലായാൽ രേഫത്തിന്റെ വിലയായ 2 കൽപ്പിക്കണം. ചില്ലുകൾ രണ്ടുതരത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. പാൽ, പാല്. ഇവയിൽ ൽ = 0; ല് = ല = 3. ക്വവർഗ്ഗം = 1; ക്രവർഗ്ഗം = 2; ക്ലവർഗ്ഗം = 3; ക്വവർഗ്ഗം = 4.

ഒരു പദം വിലനിർണ്ണയം ചെയ്തു സംഖ്യയാക്കുമ്പോൾ വലത്തുനിന്ന് എടത്തോട്ടാണ് എടുക്കേണ്ടത്. പുരാതനകാലത്ത് അക്കങ്ങൾ എഴുതുന്നതിന് പകരം കവടി നിരത്തുകയായിരുന്നല്ലോ പതിവ്. ഒരക്ഷരത്തിന്റെ വിലയുടെ എണ്ണം കവടികൾ വലത്തെ അറ്റത്ത് വെക്കുന്നു. അടുത്ത അക്ഷരത്തിനുള്ള കവടികൾ അതിന്റെ എടത്ത് ഭാഗത്ത് വെക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ എടത്തോട്ടേക്ക് സംഖ്യ വളരുന്നു. അതായത് ആദ്യക്ഷരം ഒന്നാം സ്ഥാനത്തും അടുത്ത അക്ഷരം പത്താം സ്ഥാനത്തും പിന്നത്തേ അക്ഷരം നൂറാം സ്ഥാനത്തും - ഇങ്ങനെ അക്കങ്ങൾ ക്രമേണ എടത്തോട്ട് വളർന്ന് ഉദ്ദിഷ്ടസംഖ്യയായിത്തീരുന്നു. അങ്കാനാം വാമതോഗതി എന്ന് ശാസ്ത്രം.

ജ്യോതിർഗ്ഗണനത്തിൽ എപ്പോഴും ഉപയോഗത്തിൽ വരുന്ന നിരവധി വലിയ സംഖ്യകളുണ്ട്. ഈ സംഖ്യകൾ സംഖ്യകളായി ഹൃദിസ്ഥമാക്കുക ശ്രമകരമാണല്ലൊ. അതിന് ഭാരതീയർ കണ്ടുപിടിച്ച സമർത്ഥമായ പരിഹാരമാണ് അക്ഷരസംഖ്യാസമ്പ്രദായം. സംഖ്യക്ക് പകരമായി അനുയോജ്യമായ പദമോ വാക്യമോ നിർമ്മിക്കുന്നു. ഉദാഃ

ഭാരതം → ഭ = 4; ര = 2; ത = 6
ഭാരതം → 624 → ഭാരതം
കേരളം → ക = 1; ര = 2; ള = 9
കേരളം → 921 → കേരളം
മാതൃഭൂമി → മ = 5; ത = 6; ഭ = 4; മ = 5
മാതൃഭൂമി → 5465 → മാതൃഭൂമി

പദസംഖ്യകൾ

മേൽ സൂചിപ്പിച്ച സംഖ്യാക്ഷരപദ്ധതിയിൽ ഭാരതീയർ വേറേ ചില തന്ത്രങ്ങൾ പ്രയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്. ചില സംഖ്യകൾക്ക് പകരം പ്രത്യേകമായ സാങ്കേതിക പദങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി 3 എന്നതിന് പകരമായി *കാലം* എന്ന പദം പ്രയോഗിക്കും. വർത്തമാനം, ഭാവി, ഭൂതം എന്നിങ്ങനെ കാലം മൂന്നാണല്ലൊ. അപ്രകാരം 4 എന്നതിന് പകരം *വേദം* എന്ന പദം പ്രയോഗിക്കും. ഋഗ്വേദാദി വേദങ്ങൾ നാലാണ്. അതേപോലെ 5 ന് പകരമാണ് പാണ്ഡവർ. പാണ്ഡവർ അഞ്ചുപേരെന്ന് പ്രസിദ്ധമാണല്ലൊ.

ഇപ്രകാരം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന സംഖ്യാസൂചകപദങ്ങളുടെ ഒരു പട്ടിക താഴെ കൊടുക്കുന്നു. ഒരേ സംഖ്യ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് ഒന്നിലധികം പദങ്ങളുണ്ട് എന്നതും ശ്രദ്ധേയമാണ്. അവയിൽ പലതും പര്യായപദങ്ങളാണ്.

0 = ശൂന്യം, ഖം, ഗഗനം, ആകാശം, അഭ്രം, പൂർണ്ണം, രന്ധ്രം, വിഷ്ണുപദം, വ്യോമം.

1 = കു, ഭൂമി, ശശി, ആദി, ഗോ, ഐരാവതം, ഹിമഗു, കലാധരൻ, വിധു, ഇന്ദു

2 = ലോചനം, അയനം, ജാനു, യുഗളം, ദസ്രം, അശ്വി, യമൻ, ചിറക്,

കുചം, ബാഹു.

3 = ഗുണം, അഗ്നി, ഭുവനം, കാലം, രാമൻ, പൂരം, രത്നം, ലോകം, ദോഷം, മൂർത്തി, ശൂലം.

4 = വേദം, ശ്രുതി, സമുദ്രം, വർണ്ണം, ആശ്രമം, യുഗം, കേന്ദ്രം, തുര്യം, ഉപായം, പുരുഷാർത്ഥം,

5 = ബാണം, ശരം, ഇഷു, ഭൂതം, പർവ്വം, പ്രാണം, പവനൻ, പാണ്ഡവൻ, വിഷയം, ഇന്ദ്രിയം, വ്രതം, ലോഹം, അർത്ഥം, രത്നം.

6 = രസം, രാഗം, ഋതു, ശാസ്ത്രം, തർക്കം, അംഗം, ദർശനം, ഷൺമുഖൻ, കാരകം, ദ്രവ്യം.

7 = നഗം, അഗം, പർവ്വതം, ഭൂഭൃത്ത്, ഋഷി, മുനി, സ്വരം, ധാതു, അശ്വം, വ്യസനം, വാരം, ജ്വാല.

8 = വസു, നാഗം, ഇഭം, ഗജം, സർപ്പം, ദിഗ്ഗജം, അംഗം, ഐശ്വര്യം, അഹി, അനുഷ്ടുപ്പ്.

9 = നന്ദൻ, നിധി, ഗ്രഹം, രന്ധ്രം, രത്നം, രസം, ദുർഗ്ഗ, ധാന്യം, അങ്കം.

10 = ദിക്ക്, ആശ, ദിശ, പംക്തി, അവതാരം, അംഗുലി, കർമ്മം, രാവണശിരസ്സ്.

11 = രുദ്രൻ, ഭവൻ, ഈശ്വരൻ, അക്ഷൗഹിണി, ഹരൻ.

12 = രവി, ഇനൻ, മാസം, രാശി.

13 = വിശ്വം, കാമൻ, വിശ്വദേവൻ.

14 = മനു, ഇന്ദ്രൻ, ലോകം, വിദ്യ, ശക്രൻ

15 = തിഥി, പക്ഷം, ദിനം

16 = നൃപൻ, അഷ്ടി

17 = അത്യഷ്ടി

18 = ധൃതി, പുരാണം

19 = അതിധൃതി

20 = നഖം, കൃതി

21 = ഉൽകൃതി, പ്രകൃതി, സ്വർഗ്ഗം

22 = കൃതി

23 = വികൃതി

24 = ജിനം, അർഹം, സിദ്ധം, ഗായത്രി

25 = തത്വം

27 = ഭം, ഉഡു, നക്ഷത്രം

32 = രതം, ദന്തം

33 = സുരൻ, ദേവൻ

48 = ജഗതി

49 = താനം

സംഖ്യാക്ഷരസൂത്രം പ്രയോഗിച്ച ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ

1. വത്സരബന്ധം

കൊല്ലത്തിൽ തരളാംഗത്തെ-
ക്കൂട്ടുമ്പോൾ കലിവത്സരം
കൊല്ലത്തിൽ ശരജം കൂട്ടി
ക്രിസ്ത്വബ്ദം കണ്ടുകൊള്ളണം

കൊല്ലവർഷം	1171
തരളാംഗം	3926
കലിവത്സര	5097
കൊല്ലവർഷം	1171
ശരജം	825
ക്രിസ്ത്വബ്ദം	1996

2. കൊല്ലംവെച്ചു സഭാസ്ഥാനം

കൂട്ടിയാൽ ശകവത്സരം
അതിൽകൂട്ടൂ ധീസ്ഥയോഗം
എന്നാൽ കല്യാബ്ദമായ്വരും

കൊല്ലവർഷം	1171
സഭാസ്ഥാനം	747
ശകാബ്ദം	1918
ധീസ്ഥയോഗം	3179
കലിവത്സരം	5097

കലിവത്സരം ശ്രീകൃഷ്ണഭഗവാൻ സ്വർഗ്ഗാരോഹണം ചെയ്തതിന്റെ പിറ്റെ ദിവസം മുതൽ ആരംഭിക്കുന്നു. *'ആചാരവാഗഭേദ്യ'* എന്ന് കലിവാക്യം. കലിവർഷം തുടങ്ങി 1434260 ദിവസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ അനാചാരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തി. ഇതിനോട് 2.17 കൂട്ടി 365.2587565 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ 3926 ഹരണഫലവും 156 ശിഷ്ടവും കിട്ടും. മുൻ മേടം 1-ാനു് പൂർണ്ണമായും കഴിഞ്ഞ കലിവർഷമാണ് 3926. പിന്നീടു കഴിഞ്ഞദിവസം 156. അപ്പോൾ കന്നി 1-ാന് യാകും. അതാണ് മലബാർ കൊല്ലവർഷാരംഭം. (ശങ്കരാചാര്യർ അനാചാരം ഏർപ്പെടുത്തിയതാണ് കൊല്ലവർഷത്തിന്റെ ഉത്ഭവകാരണമെന്ന് കേരളോൽപത്തിയിൽ - മംഗലാപുരം പതിപ്പിൽ - രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു).

കൊല്ലവർഷം ചിങ്ങം 1-ാന് ക്ക്
എ.ഡി. 825 ആഗസ്റ്റ് 15-ാന് യാകും.
ഉദയമാർത്താണ്ഡവർമ്മരാജ തുടങ്ങിയതാണ് കൊല്ലവർഷം എന്ന് പ്രൊഫസ്സർശ്രീ. പി. ശങ്കുണ്ണി നായർ (ജയകേരളം വാർഷികം 1956).

3. ഇംഗ്ലീഷ് മാസങ്ങളുടെ തീയതിക്രമം

പലഹാരേപാലുനല്ലൂ
പുലർന്നാലോ കലക്കിലാം
ഇല്ലപാലെന്ന് ഗോപാലൻ
ആംഗ്ലമാസദിനം ക്രമാൽ.

പല	=	31 ജനുവരി
ഹാരേ	=	28 ഫെബ്രുവരി
പാലു	=	31 മാർച്ച്
നല്ലൂ	=	30 ഏപ്രിൽ
പുലർ	=	31 മേയ്
ന്നാലോ	=	30 ജൂൺ
കല	=	31 ജൂലായ്
ക്കിലാം	=	31 ആഗസ്റ്റ്
ഇല്ല	=	30 സെപ്തംബർ
പാലെ	=	31 ഒക്ടോബർ
ന്നുഗോ	=	30 നവംബർ
പാലൻ	=	31 ഡിസംബർ

4. മലയാളമാസം തീയതി

കല്ലൂനല്ലൂ നിലം നല്ലൂ
ധീരനെല്ലാം ധരിക്കിലോ

പുല്ലായാലും യോഗഫലം
ചിങ്ങം തൊട്ടുധരിക്കെടോ.

കല്ല്	=	31 ചിങ്ങം
നല്ലു	=	30 കന്നി
നിലം	=	30 തുലാം
നല്ലു	=	30 വൃശ്ചികം
ധീര	=	29 ധനു
നെല്ലാം	=	30 മകരം
ധരി	=	29 കുംഭം
ക്കിലോ	=	31 മീനം
പുല്ലാ	=	31 മേടം
യാലും	=	31 എടവം
യോഗ	=	31 മിഥുനം
ഫലം	=	32 കർക്കിടം

ധരിക്കെടോ = 1129 (ഈ വർഷത്തെ ദിനസംഖ്യ)

നോട്ട് :
മലയാളമാസങ്ങൾക്ക് നിശ്ചിതമായ ദിനക്രമമില്ല. കൊല്ലംതോറും മാസ ദൈർഘ്യം മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കും. അതിനാൽ ഓരോ വർഷവും സൂര്യഗതി ഗണിച്ച് മാസദിനസംഖ്യ നിർണ്ണയിക്കയാണ് പതിവ്.

5. പ്രകൃതിസംഖ്യാവർഗ്ഗങ്ങൾ (ടഝഡഅഞഋട)

കിം, വാ, ധനം, തപോ, മിത്രം
തുലാ, ധവ, ഭൃതി, പദം;
ഏകാദിനവപര്യന്തം
വർഗ്ഗസംഖ്യാ ഇതീരിതാം.

കിം	=	1	=	1^2
വാ	=	4	=	2^2
ധനം	=	9	=	3^2
തപോ	=	16	=	4^2
മിത്രം	=	25	=	5^2
തുലാ	=	36	=	6^2
ധവ	=	49	=	7^2
ഭൃതി	=	64	=	8^2
പദം	=	81	=	9^2

6. പ്രകൃതി സംഖ്യാഘനങ്ങൾ (CUBES)

യജ്ഞോ, ദാനം സുഖം വിത്തം
ശരണ്യ സ്ത സ്കരോ നനു
ലവംഗ പ്രാപണം ധീര-
സൂരിത്യേവം പുനഃ ക്രമാൽ

യജ്ഞോ	=	1	=	1^3
ദാനം	=	8	=	2^3
സുഖം	=	27	=	3^3
വിത്തം	=	64	=	4^3
ശരണ്യ	=	125	=	5^3
തസ്കരോ	=	216	=	6^3
ലവംഗ	=	343	=	7^3
പ്രാപണം	=	512	=	8^3

ധീരസൂ = 729 = 9^3

7. **ചില പൊടിക്കൈകൾ**

കൈക്കുളങ്ങര രാമവാര്യരും പുന്നശ്ശേരി നമ്പി നീലകണ്ഠശർമ്മയും അഭിമുഖം ശാസ്ത്രസംബന്ധമായി പലതും സംസാരിച്ചുകൊണ്ടിരുന്നത് നമ്പിയുടെ ശിഷ്യന്മാർ കേട്ടു അത്ഭുതപ്പെട്ടുകൊണ്ടിരുന്നു. ആരാണ് അധികം ബുദ്ധിമാനെന്ന് അവർ അന്യോന്യം തർക്കിച്ചു. *നമ്മുടെ ഗുരുനാഥൻ നമ്പി തന്നെ* എന്ന് ഒരു ശിഷ്യൻ പറഞ്ഞു. ഇത് കേൾക്കാനിടയായ വാരിയർ കുട്ടികളോട് താൻ പറയുന്നതിന് കവടി നിരത്താൻ പറഞ്ഞു. അദ്ദേഹം ചൊല്ലി

ഉണ്ടായി രണ്ടുവിദ്വാന്മാർ	5 4 4 1 2 1 1 0
നമ്പിയും രാമവാര്യരും	2 2 4 5 2 1 1 0
അത് കൂട്ടാൻ പറഞ്ഞു	7 6 8 6 4 2 2 0
സൂത്രത്തിൽ ത്ധലി തർക്കിച്ചാൻ	6 1 6 3 9 6 2 7
ഏത് കിഴിക്കാൻ പറഞ്ഞു	
കിഴിച്ചപ്പോൾ	
ബുദ്ധിമാൻ വാര്യരാണ് പോൽ	1 5 2 2 4 5 9 3

8. **മേൽപത്തൂരിന്റെ കലിദിനം**

നദീപൂഷ്ടിരഹസ്യാനൂ
0 8 1 1 2 7 1 0
നഹ്യസാരം പയോജനി
0 1 7 2 1 1 8 0
നിജാൽ കുടീരാൽ സായാഹ്നേ
0 8 11 2 7 1 0
നഷ്ടാർത്ഥാ പ്രയയുർജ്ജനാ
0 1 7 2 1 1 8 0

786 മിഥുനമാസത്തിൽ
ഭാരതപ്പുഴ കവിഞ്ഞൊഴുകി

9. **മലയാളമാസദിന സംഖ്യ**

കുല	രതി	ർവ്വിധു	മാന്ത്രിക	ചിന്മയാ-
3 1	6 2	9 4	1 2 5	1 5 6
	(3 1)	(3 2)	(3 1)	(3 1)
മേടം	എടവം	മിഥുനം	കർക്കിടകം	ചിങ്ങം
ത്തദപി	തൽക്കരെ	ചത്വര	മത്സരീ	
1 8 6	2 1 6	2 4 6	2 7 5	
(3 0)	(3 0)	(3 0)	(2 9)	
കന്നി	തുലാം	വൃശ്ചികം	ധനു	
മനുഗ	മാർഗ്ഗലി	മാതുല	ഇത്യജാ-	
3 0 5	3 3 5	3 6 5		
(3 0)	(3 0)	(3 0)		
മകരം	കുംഭം	മീനം		

ന്നിഖില മാസ വിരാമ ദിനാനിഹി

ഓരോ തുകയിൽ നിന്നും മുൻ തുക കിഴിച്ചാൽ ആ മാസത്തെ ദിനസംഖ്യ കിട്ടും

10. **കൂട്ടഞ്ചേരിച്ചാക്കിയാര്**

	2 1 1 6 2 6 1 1 +
കൊടുങ്ങല്ലൂർ പിറന്നനാൾ	0 0 2 1 3 5 1 1
	2 1 3 7 6 1 2 2
തദാവന്നു തരക്കേട്	1 1 2 6 0 4 8 6
തലതൂങ്ങിക്കിടന്നു പോൽ	1 0 1 1 5 6 3 6

11. **ഉണ്ടായി രണ്ടുമാസങ്ങൾ** 5 7 5 1 2 1 1 0 +

കോട്ടയത്തും ചിറക്കലും	3 1 0 6 6 1 1 1
	8 8 5 7 8 2 2 1
താവൽപേശിയമാസങ്ങൾ	5 7 5 1 5 1 4 6
മാസം നല്ലൂ ചിറക്കല്	3 1 0 6 3 0 7 5

12. നാരായണീയം പൂർത്തിയാക്കിയ കലിദിന സംഖ്യയാണ്. ആയൂരാരോഗ്യസൗഖ്യം (1 7 1 2 2 1 0). കലിവർഷം 4 6 8 7 വർഷം 9 മാസം ഇതിൽ നിന്ന് തരളാംഗം (3 9 2 6) കുറച്ചാൽ കൊല്ലവർഷം കിട്ടും. കൊല്ലവർഷം 761. അദ്ധ്യാത്മരാമായണം മൂലം ഉത്തരദേശത്ത് നിന്ന് ഒരു വിരാഹബ്രാഹ്മണൻ കൊണ്ടു വന്നത് പവിത്രഃ കരഃ സൂര്യ (1721241) എന്ന ദിവസമാണ്. കൊല്ലവർഷം 787 തന്ത്രസമുച്ചയകർത്താവായ ചേന്നാസ് നാരായണൻ നമ്പൂതിരിയുടെ ജനനം ***നന്ദനയനേഷ്വഭോധി*** (94401080, കലിവർഷം 4529) ഉള്ളൂരിന്റെ ചരമദിനത്തെ പി. വി. കൃഷ്ണവാരിയർ കുറിച്ചത് ***ദിവ്യംതവവിജയം*** (1844618, 1949 ജൂൺ 15 അഥവാ 1124 മിഥുനം) എന്നാണ്.

ബി. സി. 3102 ഫെബ്രുവരി 17 നും 18 നുമിടയിൽ ഉജ്ജയിനിയിലെ ദക്ഷിണോത്തരധ്രുവരേഖ അർദ്ധരാത്രിയിലായിരിക്കുമ്പോഴാണ് കലിവർഷാരംഭം. കലിവർഷം ദിവസങ്ങളായാണ് സൂചിപ്പിക്കാറ്. കലിദിനസംഖ്യയെ തത്സമ (576) കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് ***ധീജഗം നൂപുര*** (210389) കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കലിവർഷസംഖ്യ ലഭിക്കുന്നു.

ആചാര്യവാഗഭേദ്യ (ആചാര്യന്റെ വാക്ക് മാറ്റാവതല്ല) കലിദിനം 1434160 AD 825 ആഗസ്റ്റ് 25. തിങ്കൾ ആദിശങ്കരൻ പരിഷ്കാരം നടപ്പാക്കിയ നാൾ. പൂരുധിഃ സമാശ്രയഃ (9257921) എ. ഡി. 343 ഫെബ്രു. 18 യജ്ഞാസ്ഥാനം സുരക്ഷ്യം (1270701) എ. ഡി. 378 ഫെബ്രു. 14. വരരുചി പുത്രനായ മേളത്തോൾ അഗ്നിഹോത്രിയുടെ ജനനവും മരണവും.

പദസംഖ്യപ്രയോഗം

ഇത്വരെ അക്ഷരസംഖ്യാ (കടപയാദി) പ്രയോഗമാണല്ലൊ കണ്ടത്. ഇനി സംഖ്യക്ക് പകരമായി പദങ്ങൾ പ്രയോഗിച്ച് ഉദാഹരണം കാണാം.

അഗ്നിപൂരാണത്തിൽ ആദ്യമായി പദങ്ങൾ സ്ഥാനമൂല്യം പാലിച്ചുകൊണ്ട് പ്രയോഗിച്ചുതുടങ്ങി. പുലിശസിദ്ധാന്തത്തിൽ **ഖഖഅഷ്ടമുനിരാമഅശ്വിനേത്രഅഷ്ടശരരാത്രിപഃ** എന്നുണ്ട്. **അങ്കാനാം വാമതോഗതി** എന്ന നിയമപ്രകാരം ഇത് 1582237, 800 ആണ്. ഖ = 0; അഷ്ട = 8; മുനി = 7; രാമൻ = 3; അശ്വി = 2; നേത്രം = 2; ശരം = 5; രാത്രിപൻ = 1.

പഞ്ചപഞ്ചയുഗഷട്കലോചന ദ്വിബ്ധിഷഡ്ഗുണമിത = 364226455.

പഞ്ചം = 5; യുഗം = 4; ഷട് = 6; ലോചനം = 2; ദ്വി = 2; അബ്ധി = 4; ഗുണം = 3.

കുദന്തലോകാ = 3321 (കു = 1; ദന്തം = 32; ലോകം = 3)

ഭനന്ദാഗ്നി = 3927 (ഭ = നക്ഷത്രം = 27; നന്ദി = 9; അഗ്നി = 3)

ആര്യഭടരീതി

അക്ഷരങ്ങളെ അക്കങ്ങളാക്കി മാറ്റുന്ന ഈ സമ്പ്രദായം പരൽ പേരെന്ന നാമത്താലും അറിയപ്പെടുന്നു. ആര്യഭടൻ ഈ സമ്പ്രദായം മറ്റൊരു രീതിയിലാണ് പ്രയോഗിച്ചത്. വളരെ വലിയ സംഖ്യകൾ പോലും വളരെ കുറച്ചക്ഷരങ്ങൾകൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുവാൻ കഴിയുമെന്നതാണ് അതിനുള്ള പ്രത്യേകത. കൃതി കഴിയുന്നത്ര ചുരുങ്ങിയിരിക്കണമെന്ന് ആര്യഭടൻ ആഗ്രഹിച്ചിരിക്കാം. ആര്യഭടനല്ലാതെ മറ്റു ഗണിതജ്ഞന്മാരാരും ഈ രീതി അവലംബിച്ചിട്ടില്ല. പ്രയോഗത്തിൽ കൊണ്ടുവരാൻ താരതമ്യേന പ്രയാസമുള്ള രീതിയാണിതെന്ന് പറയേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. സാമാന്യജ്ഞാനത്തിന് വേണ്ടി അതിനെപ്പറ്റി അൽപ്പം വിവരണം നൽകുന്നു.

ക മുതൽ മ വരെയുള്ള 25 വർഗ്ഗാക്ഷരങ്ങൾക്ക് 1 മുതൽ 25 വരെ യഥാക്രമം

വില കൽപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. യ മുതൽ ഹ വരെയുള്ള 8 അവർഗ്ഗാക്ഷരങ്ങൾക്ക് 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 എന്നിവയാണ് വില. അ, ഇ, ഉ, ഋ, അ, എ, ഐ, ഒ, ഔ, എന്നീ 9 സ്വരാക്ഷരങ്ങൾക്ക് 100^0, 100^1, 100^2, ... 100^8 എന്നീ വിലകൾ യഥാക്രമം കൽപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. സ്വരം വ്യഞ്ജനത്തോടു ചേരുമ്പോൾ സ്വരസംഖ്യയും വ്യഞ്ജനസംഖ്യയും തമ്മിൽ പെരുക്കണം.

ഉദാഃ	ച = ച് + അ	=	6×100^0	=	6
	ചി = ച് + ഇ	=	6×100	=	600
	ചു = ച് + ഉ	=	6×100^2	=	60000
	ചൃ = ച് + ഋ	=	6×100^3	=	6000000
	യ = യ് + അ	=	30×100^0	=	30
	യി = യ് + ഇ	=	30×100	=	3000
	യു = യ് + ഉ	=	30×100^2	=	300000
	ക്യു = കു + യു	=	ക് + ഉ + യ് + ഉ		

10000 + 300000 = 310000 ⟶

ഗണിച്ചെടുക്കൽ ശ്രമകരമാകുന്നതും ഉച്ചരിക്കാനുള്ള വൈഷമ്യവും ഈ രീതിക്കുള്ള ന്യൂനതകളാണ്.

ആര്യഭടീയപ്രയോഗം

യുഗരവിഭഗണാഖ്യുഘ്രു സൂര്യൻ ഒരു യുഗത്തിൽ ഖ്യുഘ്രുചക്രമണങ്ങൾ നടത്തുന്നു എന്നർത്ഥം

ഖ്യു = ഖു + യു = ഖ് x ഉ + യ് x ഉ = 20000 + 300000 = 320000

ഘ്രു = ഘ് + ഋ = 4×100^3 = 4000000

അപ്പോൾ ഖ്യു ഘ്രു = 4320000

ഒരു മഹായുഗത്തിൽ ഭൂമിയുടെ ഭ്രമണസംഖ്യ

ങിശിബുഷ്ഖ്യൃൺനു ആകുന്നു.

ങി = ങ് + ഇ = 5 ∶ 100 = 500

ശി = ശ് + ഇ = 70 ∶ 100 = 7000

ബു = ബ് + ഉ = 23 ∶ 100 = 230000

ഷ്ഖൃ = ഷൃ + ഖൃ = ഷ് ∶ ഋ + ഖ് ∶ ഋ

= 80 ∶ 100^3 + 2 ∶ 100^3 = 82000000

ൺനു = ൺ +നു = ണ് + നു = 15 ∶ 100^4 = 1500000000

അപ്പോൾ ങിശിബുഷ്ഖൃൺനു

= 500 + 7000 + 230000 + 82000000 + 1500000000 = 1582237500

സ്ഥാനങ്ങൾ

ആര്യഭടീയത്തിൽ 1, 10,100 .... എന്നിങ്ങനെ പതിനെട്ടു സ്ഥാനങ്ങൾ കൽപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്. അവ

ഏക, ദശ, ശത, സഹസ്രാ—
യുത, ലക്ഷ, പ്രയുത കോടയക്രമശ
അർബുദമബ്ജംഖർവ്വനി—
ഖർവ്വമഹാപത്മശങ്കുവസ്തസ്മാൽ
ജലധിശ്ചാന്ത്യം മധ്യം
പരാർദ്ധമിതി ദശഗുണോത്തരം സംജ്ഞാഃ

1.	ഏകം	2.	ദശം	3.	ശതം
4.	സഹസ്രം	5.	അയുതം	6.	ലക്ഷം
7.	പ്രയുതം	8.	കോടി	9.	അർബുദം
10.	അബ്ജം	11.	ഖർവ്വം	12.	നിഖർവ്വം

13.	മഹാപത്മം	14.	ശങ്കു	15.	ജലധി
16.	അന്ത്യം	17.	മധ്യം	18.	പരാർദ്ധം

യജുർവ്വേദസംഹിതയിൽ സ്ഥാനങ്ങൾ ഇപ്രകാരമാണ്.

ഏകം, ദശം, ശതം, സഹസ്രം, അയുതം,
നിയുതം, പ്രയുതം, അർബുദം, സർബുതം,
സമുദ്രം, മധ്യം, അന്തം, പരാർദ്ധം.

എന്നാൽ ഭാരതത്തിൽ 32 സ്ഥാനങ്ങൾ വരെ ഉപയോഗപ്പെടുത്തിയിരുന്നു എന്ന് തെളിഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അവയുടെ പേരുകൾ താഴെ കൊടുക്കുന്നു.

1.	ഒന്ന്	11.	അർബുദം	21.	പരാർദ്ധം
2.	പത്ത്	12.	മഹാർബുദം	22.	സാഗരം
3.	നൂറ്	13.	ഖർവ്വം	23.	പരദം
4.	ആയിരം	14.	മഹാഖർവ്വം	24.	അചിന്ത്യം
5.	പതിനായിരം	15.	പത്മം	25.	അത്യന്തം
6.	ലക്ഷം	16.	മഹാപത്മം	16.	അനന്തം
7.	പത്ത്ലക്ഷം	17.	ക്ഷോണി	27.	ഭൂമി
8.	കോടി	18.	മഹാക്ഷോണി	28.	മഹാഭൂമി
9.	10 കോടി	19.	ക്ഷോഭം	29.	അപ്രമേയം
10.	നൂറ് കോടി	20.	മഹാക്ഷോഭം	30.	അമലം
31.	അഗമ്യം	32.	അവ്യർത്ഥം		

മഹാവീരന്റെ സ്ഥാനങ്ങൾ

ഏകം, ദശം, ശതം, സഹസ്രം, ദശസഹസ്രം, ലക്ഷം, ദശലക്ഷം, കോടി, ദശകോടി, ശതകോടി, അർബുദം, മഹാർബുദം, ഖർവം, മഹാഖർവം, പത്മം, മഹാപത്മം, ക്ഷോണി, മഹാക്ഷോണി, ശംഖം, മഹാശംഖം, ക്ഷിതി, മഹാക്ഷിതി, ക്ഷോഭം, മഹാക്ഷോഭം - 24 സ്ഥാനങ്ങൾ.

വൃത്തം

ഭാരതത്തിൽ, ലോകത്തിൽ മറ്റെവിടെയെന്നപോലെ, വളരെ ഗവേഷണപഠനങ്ങൾക്ക് വിധേയമായ ഗണിതവിഷയങ്ങളിലൊന്നാണ് വൃത്തം. വൃത്തവും വ്യാസവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം നിർണ്ണയിക്കുകയെന്നത് ഗണിതപണ്ഡിതന്മാർക്ക് ആവേശകരവും വിനോദകരവും വിജ്ഞാനകരവുമായിരുന്നു. ആ ബന്ധത്തെ ഇപ്പോൾ നാം π (പൈ) എന്ന ഗ്രീക്ക് അക്ഷരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഭാരതത്തിൽ പരിധി (CIRCUMFERENCE) എന്ന വാക്കിന്റെ ആദ്യക്ഷരമായ *പ* കൊണ്ട് ചിലർ ആ ബന്ധത്തെ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്.

പരിധിയും വ്യാസവും (DIAMETRE) ബന്ധപ്പെടുത്തി മൂന്നുവാക്യങ്ങളാണുള്ളത്.

$$\frac{\text{പരിധി}}{\text{വ്യാസം}} = \pi; \quad \text{വ്യാസം} \times \pi = \text{പരിധി}; \quad \frac{\text{പരിധി}}{\pi} = \text{വ്യാസം}$$

π ന്റെ മൂല്യം പൂർണ്ണസംഖ്യയല്ലെന്ന് മാത്രമല്ല ദശാംശരൂപത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ തീരാത്ത ഒരു സംഖ്യയുമാണത്. അതിനാൽ പല പണ്ഡിതന്മാരും അതിന്റെ വില കഴിയുന്നത്ര സൂക്ഷ്മമായി നിർണ്ണയിക്കാൻ ശ്രമിച്ചിട്ടുണ്ട്. ചിലത് ഇവിടെ ചൂണ്ടിക്കാണിക്കാം.

ദ്വാവിംശതിഘ്നേവിഹൃതേ്ഥ ശൈലൈഃ
സ്ഥൂലോ്ഥവാസ്യാ ദ്വ്യ വഹാരയോഗ്യഃ
ദ്വാവിംശതി = 22
ശൈലം (സപ്തശൈലങ്ങൾ) = 7

വ്യാസത്തെ 22 കൊണ്ടുപെരുക്കി 7 കൊണ്ടുഹരിച്ചാൽ പ്രയോഗയോഗ്യമായ പരിധി കിട്ടും. ഇവിടെ π ന്റെ വില = 22/7.

π ന്റെ കൂടുതൽ സൂക്ഷ്മമായ മറ്റൊരു വില
വ്യാസേദനന്ദാഗ്നിഗതേ വിഭക്തേ

ഖബാണ സൂര്യൈഃ പരിധിസ്സുസൂക്ഷ്മഃ

വ്യാസത്തെ ഭനന്ദാഗ്നി കൊണ്ടുഗുണിച്ച്, ഖബാണ സൂര്യഃ നെ ക്കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ സൂക്ഷ്മമായപരിധി കണ്ടെത്താം.

ഇവിടെ π = $\frac{\text{ഭനന്ദാഗ്നി}}{\text{ഖബാണസൂര്യ}}$

ഭം =നക്ഷത്രം = (അശ്വതി മുതൽ) 27
നന്ദൻ = നവനന്ദന്മാർ = 9
അഗ്നി = (ദക്ഷിണാഗ്നി മുതലായ) 3
ഭനന്ദാഗ്നി = 3927*
ഖം = ആകാശം = 0
ബാണം = (കാമദേവന്റെ) പഞ്ചബാണം = 5
സൂര്യഃ = ദ്വാദശാദിത്യന്മാർ = 12
ഖബാണസൂര്യ x = 1250

ഇത് പ്രകാരം π = $\frac{3927}{1250}$

കേരളീയ ഗണിതജ്ഞന്റെ നിർദ്ദേശം ഇപ്രകാരമാണ്.

നർമ്മരാജ്യേന വട്ട ത്തെ
പെരുക്കസരളാംഗവും
കിഴിച്ചാൽ സൂക്ഷ്മമാം വിട്ടം
വട്ടത്തിന്ന മറിച്ചുമാം.

ന = 0; മ = 5; ര = 2; യ = 1
നർമ്മരാജ്യം = 1250
സ = 7; ര = 2; ള = 9; ഗ = 3
സരളാംഗം = 3927
വട്ടം = പരിധി   വിട്ടം = വ്യാസം
കിഴിക്കുക = ഹരിക്കുക

വിട്ടം കണ്ടെത്തുവാൻ വട്ടത്തെ 1250 (നർമ്മരാജ്യം) കൊണ്ടുപെരുക്കി 3927 (സരളാംഗം) കൊണ്ട് ഹരിയ്ക്കുക.

$\frac{\text{പരിധി} \times 1250}{3927}$ = വ്യാസം

വട്ടം കിട്ടുവാൻ മറിച്ചും

$\frac{\text{വ്യാസം} \times 3927}{1250}$ = പരിധി

ആര്യഭടൻ എന്ന ഗണിതപണ്ഡിതൻ π ന്റെ മൂല്യം ഇങ്ങനെ നിർണ്ണയിക്കുന്നു.

ചതുരധികം ശതമഷ്ടഗു—
ണംദ്വാഷഷ്ടിസ്താ സഹസ്രാണാം.
അയുതദ്വയവിഷ്കം ഭ—സ്യാസന്നോ വൃത്ത പരിണാഹ.

---

* *നോട്ട്* : ആദികാലത്ത് കവടി ഉപയോഗിച്ചാണ് ഗണനം നടത്തിയിരുന്നത്. ആദ്യംവായ്ത്താരിയിൽ വരുന്ന അക്ഷരത്തിന്റെയോ പദത്തിന്റെയോ വില കവടി വലത്തെ അറ്റത്ത് വെക്കും. പിന്നെ ഉച്ചരിക്കുന്നതിന്റെ വിലക്കുള്ള കവടി അതിന്റെ ഇടത്തെ ഭാഗത്ത് വെക്കും. അങ്ങനെ വലത്ത് നിന്നു ഇടത്തോട്ടാണ് പരൽ സംഖ്യയുടെ വളർച്ച. അങ്കാനാം വാമതോഗതി എന്ന് പ്രമാണം. ആകയാൽ വായ്ത്താരിലെ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ ഒന്നാം സ്ഥാനത്ത് വരുന്നു. പിന്നെ, 10, 100 എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിൽ ക്രമത്തിൽ വരും.

ചതുരധികം ശതം = ചതുരം അധികമുള്ള ശതം

= നാല് ചേർന്ന നൂറ്

= 104

അതിനെ അഷ്ടഗുണം = 8 കൊണ്ടുപെരുക്കണം

അപ്പോൾ 104 x 8 = 832

ദ്വാഷഷ്ടിസഹസ്രാണാം = 62 ആയിരങ്ങൾ = 62000 ചേർക്കണം.

അപ്പോൾ 62000 + 832 = 62832

ഇത്, അയുതദ്വയം = രണ്ട് അയുതം = 2 x 10000 = 20000

വിഷ്കംഭം = വ്യാസം

20,000 വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ പരിധി 62832 ആകുന്നു എന്ന് സാരം. ഇത് ആസന്ന (approximate) ഏകദേശവിലയാണ്.

ഇതനുസരിച്ച് $\pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416$

മേലേ z ന്റെ വില $\frac{3927}{1250}$ എന്ന് തന്നിട്ടുള്ളതും ഈ വിലയും ഒന്നു തന്നെ, ഒരേ ഭിന്നം തന്നെ.

$$\frac{3927}{1250} \times \frac{16}{16} = \frac{62832}{20000}$$

$$\frac{3927}{1250} = 3\ \frac{177}{1250} = 3 + \frac{1}{1250 \div 177} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{11}{177}}$$

$\frac{1}{16}$ ന് തുല്യമായ $\frac{11}{177}$ കളഞ്ഞാൽ ഫലം.

$$\frac{\text{പരിധി}}{\text{വ്യാസം}} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

കുറേക്കൂടി സൂക്ഷ്മത വേണമെങ്കിൽ $\frac{11}{177}$ ന് പകരം അതിനോടടുത്ത $\frac{1}{16}$ എന്ന് ചേർക്കാം. ($\frac{1}{16}$) $\frac{11}{177}$

അപ്പോൾ $\pi = 3 + \cfrac{1}{7\frac{1}{16}} = 3\frac{16}{113} = \frac{355}{113}$

ആചാര്യന്മാർ ഇങ്ങനേയും പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്.

$\frac{355}{113} = 3.14159292$ (നിർമേയസംഖ്യ)

ഇത് വരെ π ന്റെ വില ഭിന്നസംഖ്യയായിട്ടാണ് (FRACTION) കണ്ടത്. ദശാംശസംഖ്യയായിട്ടും ആചാര്യന്മാർ ഈ വിലനിർണ്ണയിച്ചിട്ടുണ്ട്. ദശാംശമായി കുറേ സ്ഥാനങ്ങളിലെ അക്കങ്ങൾ ഓർമ്മ വെയ്ക്കാൻ സഹായകമായ വിധം (കടപയാദി) പരൽ സംഖ്യാസമ്പ്രദായത്തിൽ ശ്ലോകമായി നിബന്ധിച്ചിട്ടുള്ളതിന്റെ ഒരു രൂപം ഇതാണ്.

— ഭദ്രാംബുധി സിദ്ധ ജന്മഗണിത

ശ്രദ്ധാസ്മയൻ ഭൂപഗി

(വൃത്തം : ശാർദ്ദൂലവിക്രീഡിതം. ആദ്യക്ഷരമില്ല)

ഭ = 4; ര = 2; ബ = 3; ധ = 9; സ = 7; ധ = 7;

ജ = 8; മ = 5; ഗ = 3; ണ = 5; ത = 6; ര = 2;

ധ = 9; മ = 5; യ = 1; ഭ = 4; പ = 1; ഗ = 3

ഇടത്ത് നിന്ന് വലത്തോട്ട് നിരത്തുമ്പോൾ

3.14159265358979324 (17 സ്ഥാനം)

ഇത് കടത്തനാട്ട് ശ്രീശങ്കരവർമ്മരാജ് സദ്രത്തമാല എന്ന കൃതിയിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ളതാണ്.

ഇതേപോലെ മറ്റൊരു വാക്യമുണ്ട്

ചണ്ഡാംശുചന്ദ്രാനനകുംഭിപാല ഇതനുസരിച്ച് $\pi = 3.1415926536$ (10 സ്ഥാനം)

അഥർവ്വവേദത്തിന്റെ ഉപവേദമായ സ്ഥാപിത്യവേദത്തിൽ π ന്റെ മൂല്യം 31 ദശാംശ സ്ഥാനം വരെ രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ആ മന്ത്രം ഇതാണ്.

ഗോപീഭാഗ്യമധുവ്രതാ	→	3.1415926
ശൃംഗിശോദധിസന്ധിഗാ	→	23589793
ഖാതജാതയഖാതാവാ	→	26861264
ഗാലഹാലരസംധരാ	→	33832792

അതീവബുദ്ധിമാനും ഗണിതപടുവുമായ മദ്രാസുകാരൻ ശ്രീനിവാസരാമാനുജം (1887 - 1920) π ന്റെ വില വളരെ അധികം സ്ഥാനം വരെ (60 - ഓളം) മനപ്പാഠം പറയുമായിരുന്നുവെന്ന് പറഞ്ഞുകേട്ടിട്ടുണ്ട്.

ഒരു രസികത്തം കൂടി

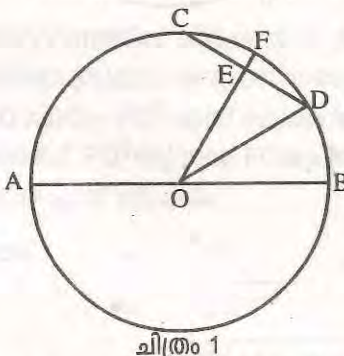
ഏഴിൽപെരുക്കീട്ടിരുപത്തി രണ്ടിൽ
കിഴിക്കവട്ടത്തിന. വിട്ടമുണ്ടാം.
വിട്ടത്തെയേറ്റീട്ടിരുപത്തിരണ്ടിൽ
കിഴിച്ചിടേഴാലതു വിട്ടമല്ലോ.

ഇത് മുൻ സൂചിപ്പിച്ച വസ്തുതകളുടെ മറ്റൊരു പ്രസ്താവം മാത്രമാണെന്ന് വ്യക്തമാണല്ലോ.

ഗുൽബസൂത്രകാരൻ π ന്റെ വില 3.0885 എന്നായി എടുത്തിട്ടുണ്ട്. വൃത്തത്തിന് തുല്യമായ ചതുരമുണ്ടാക്കുന്ന പ്രശ്നത്തിൽ π = 3.004 എന്നാണ് വിലയിരുത്തിയത്. ബൗധായനൻ എന്ന ഗണിതജ്ഞ ു ടെ വില 3 എന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചതായി കാണുന്നു. മാനവശുൽബസൂത്രപ്രകാരം π = 3.16049. പിൻക്കാലക്കാരായ ഭാരതീയർ π ന്റെ വിലകൂടുതൽ സൂക്ഷ്മമായി നിർണ്ണയിച്ചു.

വൃത്തവിശകലനപഠനം

എനി പൂർവ്വീകാചാര്യന്മാർ വൃത്തവിശകലനം നടത്തി പഠിച്ച രീതിയുമായി നമുക്കൊന്നു പരിചയപ്പെടാം.



ചിത്രം 1

വൃത്തത്തിന്റെ പ്രധാനാംഗങ്ങളാണല്ലോ വ്യാസം, ജ്യാവ (CHORD) പരിധി എന്നിവ O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൽ AB വ്യാസവും CD ജ്യാവുമാണ്. OF എന്ന വ്യാസാർദ്ധം (RADIUS) ആരം - ജ്യാവിനെ E യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. CD എന്ന ജ്യാവിനും CFD എന്ന ചാപത്തിനും (ARC) ഇടയിലുള്ള വ്യാസാർദ്ധാംശമായ EF ശരം എന്ന് പറയുന്നു.@ വ്യാസവും പരിധിയും തമ്മിൽ ഒരു നിശ്ചിതബന്ധമുള്ളത് പോലെ, വ്യാസവും ജ്യാവും ശരവും തമ്മിൽ ഒരു നിശ്ചിതബന്ധമുണ്ട്. തന്മൂലം ഒരു വൃത്തത്തിൽ ഈ മൂന്ന് അളവുകളിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടുരാശികൾ കിട്ടിയാൽ മൂന്നാമത്തേത്. കണ്ടുപിടിക്കാം. ഈ രാശിത്രയത്തിന്റെ സ്ഥിരബന്ധത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ മൂന്ന് വാക്യങ്ങൾ (FORMULA) ഉത്ഭവിച്ചിട്ടുണ്ട്. അവ

1. വ്യാസം, ജ്യാവ്, എന്നീ രണ്ടു രാശികളിൽ നിന്ന് ശരം കണ്ടെത്തുവാനുള്ള വാക്യം

@ *നോട്ട്: ശരം എന്ന ഈ രേഖാംശത്തിന് അറബിയിൽ സഹമ് എന്നു പേരുണ്ട്. വാക്കിനർത്ഥം ശരം (arrow) എന്ന് തന്നെ. ഇംഗ്ലീഷിൽ പേരില്ല.*

2. വ്യാസം, ശരം എന്നീ രാശികളിൽ നിന്ന ജ്യാവ കണ്ടെത്തുവാനുള്ള വാക്യം
3. ശരം, ജ്യാവ് എന്നീ രാശികളിൽ നിന്ന് വ്യാസം ഗണിച്ചെടുക്കുവാനുള്ള വാക്യം.

വാക്യം 1 ശരം കണ്ടെത്തുവാൻ

ജ്യാവ്യാസയോഗാന്തരഘാതമൂലം
വ്യാസസ്തദൂനോദലിതഃ ശരസ്യാൽ

വ്യാഖ്യാനം

ജ്യാവ്യാസയോഗം = വ്യാസം + ജ്യാവ്

(ജ്യാവ്യാസ) അന്തരം = വ്യാസം - ജ്യാവ്

ഘാതം = ഇവ രണ്ടും പെരുക്കിയത്

= (വ്യാ + ജ്യാ) (വ്യാ - ജ്യാ)

മൂലം = ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം

= √(വ്യാ + ജ്യാ) (വ്യാ - ജ്യാ)

വ്യാസസ്തദൂനോ = ഇത് വ്യാസത്തിൽ നിന്ന് കിഴിച്ചത്

= വ്യാ - √(വ്യാ + ജ്യാ) (വ്യാ - ജ്യാ)

ദലിതം = അതിനെ രണ്ടായി ഭാഗിച്ചത്

= (വ്യാ - √ (വ്യാ + ജ്യാ) (വ്യാ - ജ്യാ) = ശരം

ഉപപത്തി (PROOF)

$OE^2 = OD^2 - ED^2$ (Pythagorus Theorem)

$4OE^2 = 4OD^2 - 4ED^2$

$= (2OD)^2 - (2ED)^2$

$= AB^2 - CD^2$

$\therefore 2OE = \sqrt{AB^2 - CD^2} = \sqrt{(AB+CD)(AB - CD)}$

= (വ്യാ+ജ്യ) (വ്യാ ജ്യാ)

$EF = OF - OE$

$= \frac{1}{2}(2OF - 2OE)$

= ½ [(വ്യാ √(വ്യാ+ജ്യാ) (വ്യാജ്യാ)]



വാക്യം 2 ജ്യാവ് വരുത്തുവാൻ

വ്യാസാച്ഛരോനാച്ഛരസംഗുണാച്ച
മൂലം ദ്വിനിഘ്നം ഭവതീഹജീവാ.

വ്യാഖ്യാനം

വ്യാസാച്ഛരോനാ = ശരമില്ലാത്ത വ്യാസം
= ശരം കുറഞ്ഞ വ്യാസം
= വ്യാസം - ശരം

ശരസംഗുണം = ശരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്
= (വ്യാസം - ശരം) ശരം

അതിന്റെ മൂലം = √(വ്യാസം - ശരം) ശരം

ദ്വിനിഘ്നം = (അതിനെ) രണ്ടുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്

= 2 $\sqrt{\text{(വ്യാസം - ശരം) ശരം}}$
= ജ്യാവ്

ഉപപത്തി .

$CE = ED = \frac{CD}{2}$ (ചിത്രം 1)

$ED^2 = OD^2 - OE^2$
$= (OD + OE)(OD - OE)$
$= (OD + OF - EF)(OD - OE)$

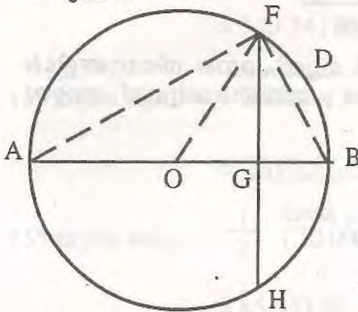
$= (2OF - EF) EF$

$ED = \sqrt{(2OF - EF) EF}$

$CD = 2ED = 2\sqrt{(2OF - EF)EF}$

ജ്യാവ് = 2 $\sqrt{\text{(വ്യാസം — ശരം) ശരം}}$

ചിത്രം 2



മറ്റോരെളുപ്പ മാർഗ്ഗത്തിൽ ഈ വാക്യം മനസ്സിലാക്കാം. അർദ്ധവൃത്തത്തിലുള്ള കോൺ മട്ടകോൺ (സമകോൺ RIGHT ANGLE) ആയിരിക്കുമല്ലൊ. അതിനാൽ കോൺ AFB = 90° (സമകോൺ). വ്യാസമായ AB ക്ക് ലംബമായ FH എന്ന ജ്യാവ് AB യെ G യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു.

സമകോണത്തിൽ ശീർഷത്തിൽ നിന്നുള്ള ലംബം (PERPENDICULAR) ഭൂമിയെ (BASE) രണ്ടുഖണ്ഡങ്ങളാക്കുന്നു. AG യും BG യും. അപ്പോൾ $AG \times BG = FG^2$ എന്ന് നമുക്കറിയാം. AG യാണ് ശരമില്ലാത്ത വ്യാസം. BG ശരമാണ്. FG^2ന്റെ മൂലം FG യും അതിന്റെ ഇരട്ടി ജ്യാവ് FH മാണ്. ഇപ്പോഴെന്തായി എന്ന് നോക്കാം.

ജ്യാവ് = $FH = 2FG$

$= 2\sqrt{FG^2}$

$= 2\sqrt{AG \times BG}$

= 2 $\sqrt{\text{(വ്യാസം — ശരം) ശരം}}$

വാക്യം 3 വ്യാസം നിർണ്ണയിക്കാൻ

ജീവാർദ്ധവർഗ്ഗേശരഭക്തയുക്തേ
വ്യാസപ്രമാണം പ്രവദന്തി വൃത്തേ.

വ്യാഖ്യാനം

ജീവാർദ്ധവർഗ്ഗം = ജ്യാവിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗ്ഗം = $\left(\frac{\text{ജ്യാ}}{2}\right)^2$

അതിനെ ശരഭക്തം = ശരം കൊണ്ടുഹരിച്ച് $\left(\frac{\text{ജ്യാ}}{2}\right)^2$ ÷ ശരം

അതിൽ (ശര)യുക്തേ = ശരം കൂട്ടുക

$= \frac{\left(\frac{\text{ജ്യാ}}{2}\right)^2}{\text{ശരം}} + \text{ശരം}$

വ്യാസപ്രമാണം = (അത്) വ്യാസമാകുന്നു.

വ്യാസം $= \frac{\left(\frac{\text{ജ്യാ}}{2}\right)^2}{\text{ശരം}} + \text{ശരം}$

ഉപപത്തി

രണ്ടാം വാക്യത്തിന്റെ പ്രതിലോമമാണ് ഈ വാക്യം.

AFB എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ (ചിത്രം 2)

$AG \times BG = FG^2$

$AG = FG^2/BG$

$AB = AG + BG = \frac{FG^2}{BG} + BG$

വ്യാസം $= \frac{(\text{അർദ്ധജ്യാ})^2}{\text{ശരം}} + \text{ശരം}$

ഈ വാക്യങ്ങളുപയോഗിച്ച് നമ്മുടെ പൂർവ്വീകർ ബുദ്ധിപരമായ നിഗമനങ്ങളിലെത്തിച്ചേർന്നിട്ടുണ്ട്. അവ തച്ചുശാസ്ത്രത്തിന് വളരെ പ്രയോജനകരവുമാണ്. ഗോളശാസ്ത്രത്തിന് അനുപേക്ഷണീയവും.

$AG \times GB = FG^2$ എന്നു കണ്ടു

(വ്യാസം — ശരം) ശരം = $(\text{ജ്യാ}/2)^2$

(വ്യാസം — ശരം) ശരം + ശരം^{2} = $(\text{ജ്യാ}/2)^2$ + ശരം^{2}

വ്യാസം x ശരം = $(\text{ജ്യാ}/2)^2$ + ശരം^{2}

$AB \times BG = FG^2 + BG^2$

$= FB^2$

FBH എന്ന ചാപത്തിന്റെ ജ്യാവാണ് FH. ∴FG എന്നത് ആ ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധജ്യാവാണ്. FB എന്നത് FDB എന്ന ചാപത്തിന്റെ ജ്യാവാണ്. അതായത് FG അർദ്ധജ്യാവായിട്ടുള്ള FBH എന്ന ചാപത്തിന്റെ അർദ്ധമായ FDB എന്ന ചാപത്തിന്റെ ജ്യാവാണ് FB.

എന്നി പുനരാഖ്യാനം ചെയ്യാം.

$AB \times BG = FB^2$

വ്യാസം x ശരം = അർദ്ധചാപത്തിന്റെ ജ്യാവർഗ്ഗം

∴ അർദ്ധചാപത്തിന്റെ ജ്യാവ് = $\sqrt{\text{വ്യാസം} \times \text{ശരം}}$

പല കോണുകളുടേയും ജ്യാവ് എത്രയെന്ന് നിർണ്ണയിക്കാൻ ഈ വാക്യം സഹായിക്കുന്നു.

$\angle FOB = 60^\circ$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ത്രികോണം FOB യിൽ OB = OF = വ്യാസാർദ്ധം.

അതിനാൽ $\angle OBF = \angle OFB = \frac{180 - 60}{2} = 60^\circ$

അപ്പോൾ അതൊരു സമദുജത്രികോണമെന്ന് വന്നു. അതിനാൽ FB = OB = വ്യാസാർദ്ധം.

AB എന്ന വ്യാസം 20,000 എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.

അപ്പോൾ വ്യാസാർദ്ധം = 10,000

60° യുടെ ചാപമായ FDB യുടെ സമസ്തജ്യാവാണ് FB. അതായത് 60° യുടെ സമസ്ത ജ്യാവ് = 10,000.

60° യുടെ ശരം = $\frac{1}{2}$ [വ്യാസം — $\sqrt{(\text{വ്യാ} + \text{ജ്യാ})(\text{വ്യാ} - \text{ജ്യാ})}$]

$= \frac{1}{2} [20{,}000 - \sqrt{30000 \times 10000}]$

$= 1339.746$

30° യുടെ ജ്യാവ് = $\sqrt{\text{വ്യാസം} \times 60^\circ \text{ യുടെ ശരം}}$

$= \sqrt{20000 \times 1339.746}$

$= \underline{5176.381}$

30° യുടെ ശരം = $\frac{1}{2} [20{,}000 - \sqrt{25176.381 \times 14823.619}]$

$= 340.74175$

15° യുടെ ജ്യാവ് = $\sqrt{20000 \times 340.74175}$

$= \underline{2610.5239}$

15° യുടെ ശരം = $\frac{1}{2} [20{,}000 - \sqrt{22610.5239 \times 17389.4761}]$

$= 85.55139$

7½° യുടെ ജ്യാവ് = $\sqrt{20000 \times 85.55139}$

$= \underline{1308.0626}$

7½° യുടെ ശരം = $\frac{1}{2} [20{,}000 - \sqrt{21308.0626 \times 18691.9374}]$

$= 21.41077$

3¾° യുടെ ജ്യാവ് = $\sqrt{20000 \times 21.41077}$

$= 654.3817$

$3\frac{3}{4}^{o}$ യുടെ ശരം = $\frac{1}{2}[20,000 - \sqrt{20654.3817 \times 19345.6183}]$

= 5.35418

$1\frac{7}{8}^{o}$ യുടെ ജ്യാവ് = $\sqrt{20000 \times 5.35418}$

= 327.2387

$1\frac{7}{8}^{o}$ യുടെ ശരം = $\frac{1}{2}[20,000 - \sqrt{20327.2387 \times 19672.7613}]$

= 1.33864

$\frac{15}{16}^{o}$ യുടെ ജ്യാവ് = $\sqrt{20000 \times 1.33864}$

= 163.6240

$\frac{15}{16}^{o}$ എന്നത് യുടെ 360° യുടെ $360 \div \frac{15}{16} = \frac{360 \times 16}{15} = 384$ ൽ ഒരു ഭാഗമാണ്. അത്രയും ചെറിയ ഒരു ചാപത്തിന്റെ ജ്യാവ മിക്കവാറും വൃത്തചാപത്തോട് ഒട്ടി നിൽക്കുന്നുണ്ടാവും. അഥവാ ആ ജ്യാവ വൃത്തപരിധിയുടെ ഒരംശമായിത്തന്നെ മാറിയിരിക്കും.

∴ $\frac{15}{16}^{o}$ യുടെ ചാപം = 163.6240

∴ വൃത്തപരിധി = 163.6240 x 384

= 62831.62

= 62832 (ഏകദേശം)

ഇങ്ങനെ 384 ജ്യാക്കളെക്കൊണ്ട് ആചാര്യന്മാർ വൃത്തപരിധി നിർണ്ണയിച്ചു.

നോട്ട് : ചാപാഗ്രങ്ങളെ ചേർക്കുന്ന ജ്യാവിന്ന് സമസ്തജ്യാവെന്ന് പറയുന്നു. സമസ്ത ജ്യാവിന്റെ പകുതിയെ ചാപാർദ്ധത്തിന്റെ ഭുജജ്യാവെന്നും അർദ്ധജ്യാവെന്നും പറയാറുണ്ട്.

ജ്യോതിഷത്തിൽ 30^0 ഒരു രാശിയായതിനാൽ 3 രാശിക്ക് 90^0 ആയി. അതിനാൽ 90° യുടെ ഭുജജ്യാവിനെ ത്രിരാശിജ്യാ അല്ലെങ്കിൽ ത്രിജ്യാ എന്ന് പറയുന്നു. 90° യുടെ ത്രിജ്യാ വൃത്തത്തിന്റെ ആരമാണ്. ആചാര്യന്മാർ സാങ്കേതികപദങ്ങൾ വ്യത്യസ്ഥാർത്ഥത്തിൽ പ്രയോഗിച്ചിട്ടുള്ളത് കാരണം, പലപ്പോഴും പ്രയാസവും കുഴപ്പവും നേരിടാറുണ്ട്.

60^0 യുടെ സമസ്തജ്യാവ് 10,000 ആയതിനാൽ 5000 ത്തിനെ 30^0 യുടെ ഭുജജ്യാവെന്ന് പറയും.

വൃത്തപരിധി കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള യുക്തി ഭാരതീയ ഗണിതജ്ഞന്മാർ ഇപ്രകാരം വിവരിക്കുന്നു.

സമോയതഃ സ്വാ പരിധെശ്ശതാംശഃ

പൃഥ്വീചപൃഥ്വീ നിതരാം തനീയാൻ

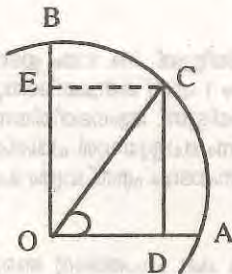
നരസ്യതത്പൃഷ്ഠഗതസ്യകൃത്സനാ

സമേവതസ്യ പ്രതിഭാത്യനസ്സാ.

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിൽ 100ൽ ഒരു ഭാഗം യുക്തികൊണ്ടു വളഞ്ഞിരിക്കേണ്ടതായിരുന്നാലും സമമായി തോന്നുന്നു. ഭൂമി വളരെ വലിയതാണ്. അതിന്റെ ചുറ്റളവ് ഏകദേശം 25000 നാഴികയാണ്. മനുഷ്യൻ വളരെ ചെറിയ ആളാണ്. ഒരുയർന്ന സ്ഥലത്തുനിന്ന് പത്ത് നാഴിക ദൂരം കാണുമെന്നാലും 2500 ൽ ഒരു ഭാഗം മാത്രമേ കാണുകയുള്ളു. നൂറിലൊരു ഭാഗം സമമായി തോന്നുമെങ്കിൽ 2500ൽ ഒരു ഭാഗം പറയേണ്ടതുണ്ടോ?

താനം SINE

തച്ചുശാസ്ത്രത്തിലും ഗോളശാസ്ത്രത്തിലും വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ട ഒരളവാണ് താനം (SINE).



ചിത്രം 3

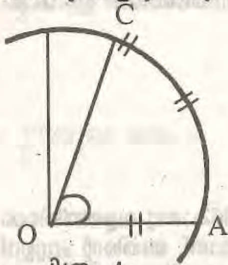
O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തപാദമാണ് ചിത്രം. വൃത്തപരിധിയുടെ നാലിലൊരു ഭാഗമായ ചാപമാണ് AB. C B ചാപത്തിന്മേലുള്ള ഒരു ബിന്ദു. OA, OB, OC എന്നിവ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം അല്ലെങ്കിൽ ആരം. CD യും CE യും OA ക്കും OB ക്കും ലംബം. കോൺ COA പരിഗണിക്കുമ്പോൾ CD/OC എന്ന ബന്ധത്തിന് ആ കോണിന്റെ താനം (SINE) എന്നു പറയുന്നു. സൈൻ COD = CD/OC. ആരം 1 എന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ സൈ COD = CD/OC = CD/1 = CD (OD/AC എന്ന ബന്ധം കോസെൻ എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. അതിനാൽ OD/OC = OD/1 = OD = കോസൈൻ COD) CD ഭുജജ്യാവ് എന്ന പേരിലും OD ക്ക് തുല്യമായ CE കോടിജ്യാവ് എന്ന പേരിലും അറിയപ്പെടുന്നു.

COD എന്ന കോണിന്റെ വലിപ്പം ഇ എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം അനുസരിച്ചിരിക്കുമെന്ന് വ്യക്തമാണല്ലൊ. C, A യോടു അടുക്കുന്തോറും കോൺ ചെറുതായി, ചെറുതായി, ഇയും അയും സന്ധിക്കുമ്പോൾ കോൺ 0 ഡിഗ്രിയാകും. അപ്പോൾ CD = 0. അയായത് സൈൻ 0° = 0. C B യോട് അടുക്കുംതോറും കോൺ വലുതായി വലുതായി ആ യുമായി സന്ധിക്കുമ്പോൾ കോൺ 90 ഡിഗ്രിയാവും. അപ്പോൾ OC = OB = 1. അതിനാൽ സൈൻ 90° = 1. ഇപ്പോൾ ഒരു കാര്യം വ്യക്തമായി. സൈനിന്റെ വില 0 മുതൽ 1 വരെയാകുന്നു. എന്നു വെച്ചാൽ 0 മുതൽ വ്യാസാർദ്ധം വരെയാകുന്നു.

1 ഡിഗ്രി (ഭാഗം)	=	60 കല (ഇലി)
1 കല	=	60 വികല (വിലി)
1 വിലി	=	60 തൽപര

1 തൽപ്പര	=	60 പ്രതൽപ്പം
പരിധി	=	360 ഭാഗം
	=	360 X 60 = 21600 ഇലി

വൃത്തപരിധിയെ 21600 അംശമായി ഭാഗിച്ചു. ആ അംശം വൃത്തത്തിന്റെ കല എന്ന പേരിലറിയപ്പെടുന്ന ചാപം. ഈ കല കൊണ്ടു വ്യാസത്തേയും അളക്കാം. അപ്പോൾ വ്യാസം 6875½ കലയെന്നും വ്യാസാർദ്ധം 3437.75 കലയെന്നും കിട്ടുന്നു. അതിനാൽ ഗണനത്തിൽ വ്യാസാർദ്ധം 3438 എന്നും നിർണ്ണയിക്കാറുണ്ട്. അങ്ങിനെ വ്യാസാർദ്ധം 3438 എന്ന് ഉദ്ദേശിക്കുമ്പോൾ സൈൻ 0 മുതൽ 3438 വരെ ആയിരിക്കണമല്ലോ.



ചിത്രം 4

ഈ വസ്തുത മറ്റൊരു ചിന്താഗതിയിലൂടെ സ്ഥാപിക്കാം. പരിധി = അർദ്ധവ്യാസം x 2π. അതായത് പരിധിയിൽ 2π അർദ്ധവ്യാസങ്ങളുണ്ട്. ചിത്രത്തിൽ AC എന്ന ചാപം OA എന്ന അർദ്ധവ്യാസത്തിന് നീളത്തിൽ സമമെന്നു വരുമ്പോൾ, ആ ചാപം കേന്ദ്രമായ O യിലുണ്ടാക്കുന്ന COA എന്ന കോൺ ഒരു കാരകം (RADIAN) എന്നു പറയുന്നു. അപ്പോൾ 2π കാരകം കേന്ദ്രത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്നു. 2π കാരകം = 360°

∴ കാരകം = 360 / 2π = 57° 17.7 = 57 ഭാഗം 17.7 കല

ഒരു വ്യാസാർദ്ധം ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ = 57° 17.7 = 3437.716 കല = 3438 കല. ഇങ്ങനെയും അർദ്ധവ്യാസം 3438 എന്ന് നിർണ്ണയിക്കാം.

ഭാരതത്തിൽ കണിശമായി ഈ അളവിനെ നിർണ്ണയിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതനുസരിച്ച്
1 കാരകം = 3437 കല 44 വികല 48 തൽപ്പര 22 പ്രതപ്പര.
പരൽപ്പേരിൽ (അക്ഷരസംഖ്യയിൽ)

ശ്രേഷ്ഠോ ദേവോ വിശ്വസ്ഥലീ ഭൃഗു എന്നാണ്
2 2 8 4 4 4 7 3 4 3



പൗരാണികന്മാർ താനവില നിർണ്ണയിച്ചുരേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. 3¾ ഭാഗം ഇടവിട്ടുള്ള കോണുകളുടെ താനമാണ് ഗണിച്ചിട്ടുള്ളത്. വ്യാസാർദ്ധം 1 എന്ന് കണക്കാക്കിയും 3438 എന്ന് കണക്കാക്കിയും രണ്ടു പട്ടിക അവർ തയ്യാറാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ആംഗലരീതിയനുസരിച്ചുള്ള നവീനവിലയും ഭാരതപ്പട്ടികയിലെ വിലയും തുലനം ചെയ്യുമ്പോൾ പരിഷ്കൃതോപകരണങ്ങളൊന്നുമില്ലാതിരുന്ന ആ പഴമക്കാരുടെ ഗണനപാടവം എന്ത് മാത്രം മഹത്തരമായിരുന്നു എന്ന് ബോദ്ധ്യപ്പെടുന്നതാണ്.

താനഗണന താഴെ വിസ്തരിച്ചു പറയുന്നു.

30 ഭാഗത്തിന്റെ 8ൽ ഒരംശം - അതായത് 3 ഭാഗം 45 കല ചാപത്തിന്റെ അല്ലെങ്കിൽ കോണിന്റെ ഇടവിട്ടുള്ള കോണുകളുടെ താനമാണ് പട്ടികയിലുള്ളത്. മറ്റു കോണുകളുടെ താനങ്ങൾ ആനുപാതികമായി കണ്ടെത്താവുന്നതാണ്. താനം ക്രമഗതമായി നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനുള്ള രണ്ടു നിയമങ്ങൾ സൂര്യസിദ്ധാന്തത്തിലുണ്ട്. അവ:

1. ഒരു രാശിയിലെ കലയുടെ (1800) എട്ടിലൊന്ന് ആദ്യത്തെ താനം: ആ താനത്തെ അതുകൊണ്ട് തന്നെ ഹരിക്കുക. ഹരണഫലം ആ താനത്തിൽ നിന്ന് കിഴിക്കുക. അപ്പോൾ കിട്ടുന്ന ബാക്കി താനത്തോട് കൂട്ടുക. അത് രണ്ടാം താനം.
2. ഇതേ മാതിരി തുടർച്ചയായി കിട്ടുന്ന താനത്തിനെ ആദ്യതാനം കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ഹരണഫലങ്ങളുടെ തുക ഹാരകത്തിൽ നിന്ന് കിഴിക്കുക. ബാക്കി കിട്ടുന്നത് ഒടുവിലെ താനത്തോടു കൂട്ടുക. അത് അടുത്ത താനമായിരിക്കും.

ഇങ്ങനെ ഒരു വൃത്തപാദത്തിലെ 24 താനങ്ങളും കണ്ടെത്തിയിരിക്കയാണ്.
ആ നിയമങ്ങളുടെ ആംഗല രീതിയിലുള്ള ഫോർമുല

$\text{Sin A} = \frac{1800}{8} = 225$

$\text{Sin 2A} = \text{Sin A} + \text{Sin A} - \frac{\text{Sin A}}{\text{Sin A}}$

$= 225 + 225 - 1 = 449$

$\text{Sin 3A} = \text{Sin 2A} + \text{Sin A} - \frac{\text{Sin A} + \text{Sin 2A}}{\text{Sin A}}$

$= 449 + 225 - \frac{225 + 449}{225}$

$= 674 - \frac{674}{225} = 671$

$\text{Sin 4A} = \text{Sin 3A} + \text{Sin A} - \frac{\text{Sin A} + \text{Sin 2A} + \text{Sin 3A}}{\text{Sin A}}$

$= 671 + 225 - \frac{225 + 449 + 671}{225}$

$= 896 - \frac{1345}{225} = 890$

$\text{Sin 5A} = \text{Sin 4A} + \text{Sin A} - \frac{\text{Sin A} + \text{Sin 2A} + \text{Sin 3A} + \text{Sin 4A}}{\text{Sin A}}$

$= 890 + 225 - \frac{225 + 449 + 671 + 890}{225}$

$= 1115 - \frac{2235}{225} = 1105$

ഇങ്ങനെ തുടർച്ചയായി ഗണനം നടത്തുക.

താനപ്പട്ടിക TABLE OF SINES

	ARC ചാപം		സൂര്യസിദ്ധാന്തം ആര്യഭട	ഇംഗ്ലീഷ് വില
	ഭാഗം	കല	വില	R=3438
	3	45	225	224.85
	7	30	449	448.95
	11	15	671	670.72
	15	00	890	889.82
	18	45	1105	1105.01
	22	30	1315	1315.05
	26	15	1520	1520.58
	30	00	1719	1719.00
	33	45	1910	1910.05
	37	30	2093	2092.09
	41	15	2267	2266.08
	45	00	2431	2431.01
	48	45	2585	2584.08
	52	30	2728	2727.55
	56	15	2859	2855.55
	60	00	2978	2977.04
	63	45	3084	3083.45
	67	30	3177	3176.06
	71	15	3256	3255.75
	75	00	3321	3320.85
	78	45	3372	3371.95
	82	30	3409	3408.75
	86	15	3431	3430.85
	90	00	3438	3438.00

വൃത്തഗത സമക്ഷേത്രങ്ങൾ

ഒരു വൃത്തത്തിൽ സമഭുജങ്ങളായ ത്രികോണം, ചതുർഭുജം, പഞ്ചഭുജം എന്നിങ്ങനെ ഒമ്പത് ഭുജങ്ങൾ വരേയുള്ള ബഹുഭുജക്ഷേത്രങ്ങൾ ആലേഖനം ചെയ്യുമ്പോൾ, അവ ഓരോന്നിന്റേയും ഭുജദൈർഘ്യം ആചാര്യന്മാർ ഗണിച്ചുവെച്ചിട്ടുണ്ട്. അതെങ്ങനെയെന്ന് വിശദമാക്കാം

ഖഖഖാഭ്രാർക്ക സംഭക്ത

ലബ്ധതേക്രമശോഭുജാ

ഇവിടെ ഗണനത്തിന്ന് ആധാരമാക്കിയിട്ടുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം ഖഖഖാഭ്രാർക്ക ആകുന്നു.

ഖം = 0; അഭ്രം = 0; അർക്കം = 12

∴ വൃത്തവ്യാസം = 1,20,000

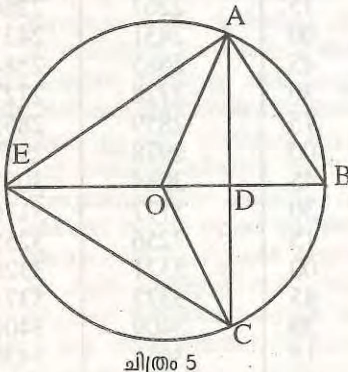
1. **സമഭുജത്രികോണം**

ഈ വൃത്തത്തിൽ വരയ്ക്കാവുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഭുജ ദൈർഘ്യം **ത്രിദ്വ്യം കാഗ്നിനഭശ്ചന്ദ്രെ** എന്ന് നിർണ്ണയിച്ചിരിക്കുന്നു

ത്രി = 3; ദ്വി = 2; അംക = 9; അഗ്നി = 3; നഭസ്സ് = 0; ചന്ദ്രൻ = 1

അപ്പോൾ 103923 എന്ന് കിട്ടി.

ഗണനം



ചിത്രം 5

ACE വൃത്തത്തിൽ വരഞ്ഞിട്ടുള്ള സമത്രിഭുജം. O വൃത്തകേന്ദ്രം. EOB = വ്യാസം. ACയും EBയും Dയിൽ സന്ധിക്കുന്നു. AB ഷഷ്ടഭുജത്തിന്റെ (HEXAGON) ഒരു ഭുജമാകുന്നു. \ AB = OA = 60,000 (വ്യാസാർദ്ധം) OD = BD = 30,000.

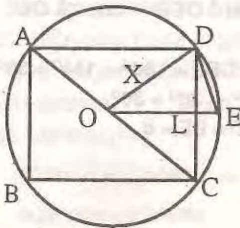
$$AD^2 = OA^2 - OD^2$$
$$= (OA + OD)(OA - OD)$$
$$= (60000 + 30000)(60000 - 30000)$$
$$= 90000 \times 30000$$
$$= 2700000000$$
$$AD = \sqrt{2700000000}$$
$$AC = 2AD = 2\sqrt{2700000000}$$
$$= 103923$$ (ത്രികോണഭുജം)

2. **സമചതുർഭുജം**

ത്രിബാണാഷ്ടയുഗാഷ്ടദി എന്ന് വാക്യം

ത്രി = 3; ബാണം = 5; അഷ്ടം = 8; യുഗം = 4; അപ്പോൾ 84853 എന്ന് വന്നു.

ഗണനം



ചിത്രം 6

ABCD വൃത്തത്തിൽ വരയ്ക്കാവുന്ന ചതുർഭുജം. AC, BDഎന്നീ കർണ്ണങ്ങൾ വൃത്തകേന്ദ്രമായ O യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. കർണ്ണങ്ങളുടെ പെരുക്കം = രണ്ടുചതുർഭുജക്ഷേത്രം. കർണ്ണഭുജം^{2} = 2 x ചതുർഭുജം.

AC = BD = വ്യാസം = 1,20,000

$AC \times BD = AC^2 = (1,20,000)^2$

$$= 2 \times ABCD$$
$$\therefore ABCD = \frac{1}{2} \times (1,20,000)^2$$

ചതുർഭുജബാഹു $= \sqrt{\frac{1}{2}(1,20,000)^2}$

$$= \frac{120000}{\sqrt{2}} = 84853$$

3. **അഷ്ടാശ്രബാഹു**

ദ്വിദ്വിനന്ദേഷുസാഗ രൈഃ

ദ്വി = 2; നന്ദം = 9; ഇഷു = 5; സാഗരം = 4 അപ്പോൾ 45922 എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഗണനം

ചിത്രം 6ൽ OL ചതുർഭുജബാഹുവായ CD ക്ക് ലംബം. OL വൃത്തപരിധിയെ E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. അപ്പോൾ E എന്ന ബിന്ദു DC എന്ന ചാപത്തിന്റെ മദ്ധ്യമായി. അതിനാൽ DE എന്ന ജ്യാവ് അഷ്ടാശ്രബാഹുവിന്റെ ഒരു ഭുജമാണ് എന്ന് സിദ്ധിക്കുന്നു. DC എന്ന ജ്യാവിന്റെ ശരമാണ് LE.

$$LE = OE - OL = OE - \tfrac{1}{2} BC$$
$$= 60000 - 42426\tfrac{1}{2}$$
$$= 17573\tfrac{1}{2}$$

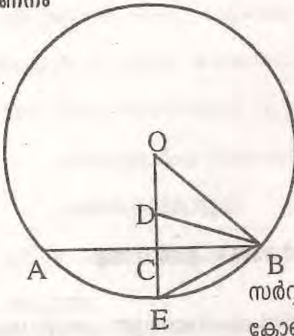
DE^2 = വ്യാസം x ശരം

$$= 1,20,000 \times 17,573\tfrac{1}{2}$$
$$= 2108820000$$
$$\therefore DE = \sqrt{2108820000} = 45922$$ അഷ്ടാശ്രബാഹു

4. **പഞ്ചാശ്രബാഹു**

വേദാഗ്നി ബാണഖാശ്വൈശ്ച എന്ന വാക്യം
വേദം = 4; അഗ്നി = 3; ബാണം = 5; ഖം = 0; അശ്വം = 7
അപ്പോൾ 70534 എന്ന് സിദ്ധിക്കുന്നു.

ഗണനം



ചിത്രം 7

ചിത്രത്തിൽ AB പഞ്ചാശ്രബാഹുവിന്റെ ഒരു ഭുജമെന്നിരിക്കട്ടെ. OC അതിന് ലംബം. അപ്പോൾ AC = BC = ½AB. OC എന്ന രേഖ വൃത്തപരിധിയെ E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു. AB എന്ന ചാപത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ് E. ചാപം BE വൃത്തപരിധിയുടെ 1/10 ഭാഗമാണ്. അതിനാൽ ജ്യാവ് BE ദശാശ്രബാഹുവിന്റെ ഒരു ഭുജമാണെന്നു വരുന്നു. BE = d എന്നിരിക്കട്ടെ. CE = CD ആകും വിധം D നിർണ്ണയിക്കുക. BD യോജിപ്പിക്കുക. ത്രികോണം ECB യും ത്രികോണം DCB യും സർവ്വസമം. അതിനാൽ BE = BD = d

കോൺ EOB = 360/10 = 36°. കോൺ OEB = കോൺ OBE = ½ (180° - 36°) = 72°

$\angle BDE = \angle BED = 72^\circ$ അപ്പോൾ $\angle DBE = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$

$\therefore \angle OBD = \angle OBE - \angle DBE = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$

$\angle OBD = \angle DOB = 36^\circ \therefore OD = BD = BE = d$

ത്രികോണങ്ങൾ OEB, DEB സദൃശങ്ങൾ (SIMILAR)

കാരണം രണ്ടിന്റേയും കോണുകൾ തുല്യം

$\therefore \frac{OE}{BE} = \frac{BE}{DE}$ അതായത് $\frac{r}{d} = \frac{d}{r-d}$

$\therefore d^2 = r(r-d);\ r^2 = d^2 + rd$

$d^2 + rd + (\frac{r}{2})^2 = r^2 + (\frac{r}{2})^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5r^2}{4}$

$(d + \frac{r}{2})^2 = 5r^2/4$

$\therefore d = \sqrt{5r^2/4} - \frac{r}{2}$

$\sqrt{5}\frac{r}{2} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$

ഇത് ദശാശ്രബാഹുവിന്റെ മാനം

$r = 60{,}000;\ d = 37082$

$DE = r - d = r - \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$

$= r - \frac{\sqrt{5}r}{2} + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2} - \frac{\sqrt{5}r}{2} = \frac{r}{2}(3 - \sqrt{5})$

$DC = \frac{^2DE}{2} = \frac{r}{4}(3 - \sqrt{5})$

$BC^2 = BD^2 - CD^2 = \frac{r^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2 - \frac{r^2}{16}(3-\sqrt{5})^2$

$= \frac{r^2}{16}[4(5 + 1 - 2\sqrt{5}) - (9 + 5 - 6\sqrt{5})]$

$= \frac{r^2}{16}(24 - 8\sqrt{5} - 14 + 6\sqrt{5}) = \frac{r^2}{16}(10 - 2\sqrt{5})$

$= \frac{5r^2 - \sqrt{5}r^4}{8}$ $AB = 2BC = 2\sqrt{\frac{5r^2 - \sqrt{5}r^4}{8}}$

BC എന്നത് പഞ്ചാശ്രബാഹുവിന്റെ അർദ്ധം. അതായത് 36° യുടെ ഭുജജ്യാവ്.

$\sqrt{5r^4} = \sqrt{6480 \times 10^{16}} = 8049844719$

$5r^2 = 180\,0000\,0000$

$$\frac{5r^2 - \sqrt{5r^4}}{8} = \frac{9950155281}{8} = 1243769410$$

$AB = 2BC = 2\sqrt{1243769410} = 70534$ (സ്ഥൂലം) പഞ്ചാശ്രബാഹു.

5. സമസപ്താശ്രബാഹു

ബാണേഷ്ഠ നഖബാണശ്ച എന്ന് വാക്യം

ബാണം = 5; ഇഷ്ഠ = 5; നഖം = 20; ബാണം = 5

അപ്പോൾ 52055 എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഈ ബാഹുഖണ്ഡിക്കുന്ന ചാപം = 360/7 = 51°25'43"

അർദ്ധചാപം = 25°42'51".5

12000 വ്യാസമായ വൃത്തത്തിൽ ഇതിന്റെ ഭുജജ്യാവ് = 26033

ചാപാ ച്ചതത്തൽഫല ദോപിതദ്വൽ

എന്നിത്യാദികരണപദ്ധതി സൂത്രപ്രകാരമാണ്

ഈ ജ്യാവ് വരുത്തിയിരിക്കുന്നത്. ഇതിനെ 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ

സപ്താശ്രബാഹു = 52066 എന്ന് സിദ്ധിക്കുന്നു. ആചാര്യൻ ശ്ലോകത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്നത് 52055 എന്നാകുന്നു.

6. സമനവാശ്രബാഹു

കുരാമദശവേദൈശ്ച

കു = 1; രാമ = 3; ദശം = 10; വേദം = 4. അപ്പോൾ 41031 എന്ന് വരുന്നു.

നവഭുജത്തിന്റെ ഭാഗം ഖണ്ഡിക്കുന്ന ചാപം = $\frac{360°}{9}$ = 40°.

ഇതിന്റെ പകുതി = 20°.

12000 വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിൽ 20°ത്തിന്റെ ഭുജജ്യാ = 20521

അതിന്റെ ഇരട്ടിയാണ് നവഭുജബാഹു

∴ നവഭുജബാഹു = 20521 x 2 = 41042

ആചാര്യൻ 41031 എന്നാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്.

സമഭുജക്ഷേത്രസർവ്വസ്വം

3 ത്രിദ്വ്യംഗാഗ്നിനഭശ്ചന്ദ്രൈ	103923
4 സ്ത്രീബാണാഷ്ടയുഗാഷ്ടഭിഃ	84863
5 വേദാഗ്നിബാണഖാശ്വൈശ്ച	70534
6 ഖഖാഭ്രാഭ്രരസൈഃ ക്രമാൽ	60000
7 ബാണേഷുനഖബാണൈശ്ച	52055
8 ദ്വിദ്വിനം ദേഷുസാഗരൈഃ	45922
9 കുരാമദശവേദൈശ്ച	41031

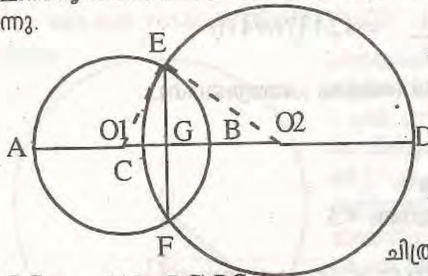
വൃത്തേവ്യാസേസമാഹതേ
ഖഖഖാഭ്രാർക്കസംഭത്തേ
ലബ്ധന്തേക്രമശോഭുജാഃ
വൃത്താന്തസ്ത്ര്യസ്രപൂർവ്വാണാം
നവാസ്രാന്തം പൃഥക്പൃഥക്

സാരം :

103923, 84853, ... എന്നീ സംഖ്യകളെക്കൊണ്ട് വൃത്തവ്യാസത്തെ ഗുണിച്ച് 1,20,000 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ത്രിഭുജം തൊട്ട് നവഭുജം വരെയുള്ള വൃത്തഗതസമഭുജക്ഷേത്രങ്ങളുടെ ഭുജങ്ങൾ ക്രമേണ ലബ്ധമാകുന്നതാണ്.

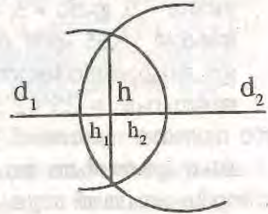
ഛിന്നവൃത്തങ്ങൾ

ഗോളശാസ്ത്രത്തിൽ ഗ്രഹണഗണനം മുതലായവയിൽ ആവശ്യമായ തത്വങ്ങളാണ് ഛിന്നവൃത്തപഠനത്തിൽ നിന്ന് ലഭ്യമാകുന്നത്. അതിന്റെ ലഘുമാതൃക ഇവിടെ കുറിക്കുന്നു.



ചിത്രം 8

ചിത്രം 8ൽ രണ്ടുവൃത്തങ്ങൾ അന്യോന്യം ഛേദിക്കുന്നു. അപ്പോഴുണ്ടാകുന്ന സമ്പാതശരങ്ങൾ CG, BG എന്നിവ കാണേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. അത് BC എന്ന ഗ്രാസം (EROTIN) അടിസ്ഥാനമാക്കി നിർണ്ണയിക്കുന്നു.



ചിത്രം 9

$$CG = \frac{(AB - BC)\,BC}{(AB + CD) - 2\,BC}$$

$$BG = \frac{(CD - BC)\,BC}{(AB + CD) - 2\,BC}$$

എങ്ങിനെയെന്നാൽ

വൃത്തം O_1 ൽ $AG \,.\, GB = EG \,.\, GF$

വൃത്തം O_2 ൽ $DG \,.\, GC = EG \,.\, GF$

$\therefore AG \,.\, GB = DG \,.\, GC$

അതായത് $(AB - BC + CG)\,(BC - CG) = CG\,(CD - CG)$

$$(AB - BG)\,BG = (BC - BG)\,(CD - BC + BG)$$

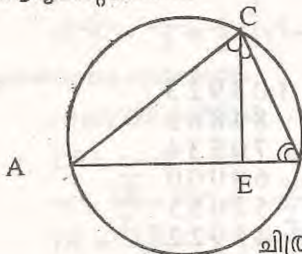
വൃത്തം O_1 ന്റെ വ്യാസം d_1 എന്നും വൃത്തം O_2 ന്റെ വ്യാസം d_2 എന്നും ഇരിക്കട്ടെ.

$CG = h_1, \quad BG = h_2, \quad BC = h$ ആണെങ്കിൽ

$$h_1 = \frac{(d_1 - h)\,h}{d_1 + d_2} \; ; \; h_2 = \frac{(d_2 - h)\,h}{(d_1 + d_2) - 2h}$$

എന്ന ഫലം ലഭ്യമാണ്. ഇതിന്റെ ഉപപത്തി നീലകണ്ഠൻ (1500 D) നൽകിയിട്ടുണ്ട്.

ആര്യഭടന്റെ ത്രികോണം



ചിത്രം 10

ഇദാനീന്തന പ്രയോഗമനുസരിച്ച് ആര്യഭടൻ ത്രികോണശോധന നടത്തിയതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

ചിത്രം 10ൽ ത്രികോണം ABC അർദ്ധവൃത്തത്തിലാണ്. ആയതിനാൽ കോൺ ABC ഒരു ഋതുകോൺ ആകുന്നു. AB എന്ന പാദത്തിലേക്ക് CE ലംബവുമാണ്. ഇവിടെ ആര്യഭടസിദ്ധാന്തം

ത്രിഭുജസ്യഫലശരീരം

സമദലകോടി ഭുജാർദ്ധസംവർഗ്ഗഃ (ഗണിതപാദം)

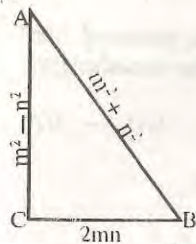
ത്രികോണം AEC യും ത്രികോണം BEC യും ആയി ത്രികോണം ABC വിഭജിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും സദൃശങ്ങളാണ് (SIMILAR). കാരണം $\angle ECB = \angle CAE$; $\angle EBC = \angle ACE$. എങ്ങനെ രണ്ടിന്റേയും കോണുകൾ തുല്യങ്ങളാണ്. അതുകൊണ്ട് അവയുടെ ഭുജദൈർഘ്യം ആനുപാതികമായിരിക്കും.

ആകയാൽ $\frac{AE}{CE} = \frac{CE}{BE}$ $\quad \therefore AE.BE = CE^2$

ജൈനഗണിതപണ്ഡിതനായ ഉമാസ്വാതിയും (ഒന്നാം ശതകം എ.ഡി) പിൽക്കാലത്ത് ജിനഭദ്രഗണി (609 എ.ഡി.) ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ (628 എ.ഡി.) എന്നിവരും തങ്ങളുടെ ഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ ഇതേ തത്വം ആവിഷ്കരിച്ചിട്ടുണ്ട്

ബ്രഹ്മഗുപ്തന്റെ ത്രികോണം

മട്ടത്രികോണം



ചിത്രം 11

മട്ടത്രികോണത്തിൽ കർണ്ണവർഗ്ഗം ഭുജവർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകക്ക് തുല്യമാണെന്ന് തത്വം ചിരപുരാതനകാലം - ശിൽബസൂത്രകാലം - മുതൽക്കേ അറിയപ്പെടുന്നതാണ്.

ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ സങ്കൽപ്പിക്കുന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഭുജങ്ങളുടെ അളവ് ഇപ്രകാരമാണ്.

$a = 2mn;\ b = m^2 - n^2;\ e = m^2 + n^2$

$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2$

$= m^4 + n^4 + 2m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2$

അതായത് $c^2 = a^2 + b^2$

m, n എന്നിവ അതുല്യങ്ങളും മുഴുസംഖ്യ (rational) കളുമാണ്. m നും n നും ഏത് വില കൽപ്പിച്ചും പൈത്താഗോറിയൻ സംഖ്യാവൃത്തങ്ങളെ യഥേഷ്ടം നിർമ്മിക്കാം.

മട്ടക്കോണനിർമ്മാണത്തിൽ ബ്രഹ്മഗുപ്തസൂത്രവാക്യം

1 ത്രികോണത്തിന്റെ ഭുജങ്ങളിൽ ഒന്ന് a യും m ഒരു മുഴുസംഖ്യയുമാണെങ്കിൽ ത്രികോണഭുജങ്ങൾ.

(1) a; (2) $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{m} - m\right)$; (3) $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n} + m\right)$

പരിശോധന : ഇതിൽ $a = 10, m = 2$ എങ്കിൽ

ഭുജം $2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{m} - m\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{100}{2} - 2\right) = \frac{1}{2}.48 = 24$

ഭുജം $3 = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{m} + m\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{100}{2} + 2\right) = \frac{1}{2}.52 = 26$

ഇവിടെ $10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$

പൊതുപരിശോധന

ഭുജം 1 ന്റെ വർഗ്ഗം $= a^2$

ഭുജം 2 ന്റെ വർഗ്ഗം $= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{m} - m\right)\right]^2$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{a^4}{m^2} + m^2 - 2a^2\right)$

$= \frac{a^4}{4m^2} \quad \frac{m^4}{4m^2} + \quad \frac{2a^2m^2}{4m^2}$

$= \frac{a^4 + m^4 - 2a^2m^2}{4m^2}$

ഭുജം 1^2 + ഭുജം $2^2 = a^2 + \frac{a^4 + m^4 - 2a^2m^2}{4m^2}$

$= \frac{4a^2m^2 + a^4 + m^4 - 2a^2m^2}{4m^2}$

$= \frac{a^4 + m^4 + 2a^2m^2}{4m^2}$

ഭുജം 3 ന്റെ വർഗ്ഗം $= \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{m}\right)\right]^2$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{m} + m\right)^2$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{a^2 + m^2}{m}\right)^2$$

$$= \frac{a^4 + m^4 + 2a^2m^2}{4m^2}$$

ഭുജം $(2)^2$ + ഭുജം $(1)^2$ = ഭുജം $(3)^2$ എന്ന് കിട്ടി.

2. **മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം തന്നാൽ**

കർണ്ണാടകത്തിലെ ജൈനഗണിതജ്ഞനായ മഹാവീരാചാര്യനും ഭാസ്കരൻ ദ്വിതീയനും കർണ്ണത്തിൽ നിന്ന് ത്രികോണം സൃഷ്ടിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് വ്യക്തമാക്കിയിട്ടുണ്ട്. (ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ നിശ്ശബ്ദനാണ്).

മഹാവീരപദ്ധതി

ഭുജങ്ങൾ a, $\frac{2mnc}{m^2 + n^2}$, $\left(\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\right)$ c

ഭാസ്കരപദ്ധതി

ഭുജങ്ങൾ a, $\frac{2pc}{p^2 + 1}$, $\left(\frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}\right)$ c

നോട്ട് :

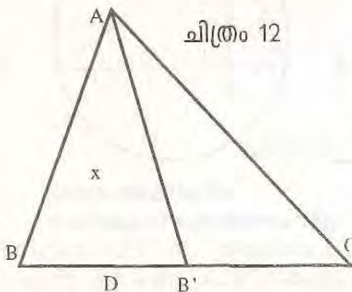
മഹാവീരപദ്ധതിയിൽ $\frac{m}{n} = p$ എന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ ഭാസ്കരപദ്ധതിയായി. രണ്ടും യഥാർത്ഥത്തിൽ ഒന്നുതന്നെ. സ്വതന്ത്രമായി കണ്ടെത്തുന്ന രൂപം വ്യത്യസ്തമായിരിക്കുന്നു എന്നേയുള്ളു.

സംഖ്യാസിദ്ധാന്തചരിത്രം (HISTORY OF THEORY OF NUMBERS) എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിൽ ഡിക്സൻ (DICKSON) മേൽ സൂചിപ്പിച്ച രണ്ടുപദ്ധതികളുടേയും ഉപജ്ഞാതാവ് ലിയോനാഡൊ ഫിബോനാച്ചി (LEONARDO FIBONACCI - 1175-1250) എന്ന ഗണിതജ്ഞനാണെന്ന് രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഫിബോനാച്ചി എ.ഡി. 1202 ലാണ് ഇത് കണ്ടെത്തുന്നത്. മഹാവീരനും (9-ാം നൂറ്റാണ്ട്) ഭാസ്കരൻ രണ്ടാമനും (ജ.1114) എത്രയോ മുമ്പേ ഇത് കണ്ടുപിടിച്ചു കഴിഞ്ഞിരിക്കുന്നു. പക്ഷെ അക്കാലത്ത് പ്രചരണ മാദ്ധ്യമങ്ങളില്ലാതിരുന്നതിനാൽ അവർ അർഹിക്കുന്ന പ്രസിദ്ധി അവർക്ക് ലഭിച്ചില്ലെന്ന് മാത്രം.

3. **രണ്ടു ഭുജങ്ങളും ഉയരവും മുഴുസംഖ്യകളായുള്ള ത്രികോണം**

മേലേ 1 ൽ കാണിച്ച തത്വമാണ് ഇവിടെ പ്രയോഗിക്കേണ്ടത്. ഒരു ഭുജവും ഏതെങ്കിലും മുഴുസംഖ്യയും ഉപയോഗപ്പെടുത്തിക്കൊണ്ടുള്ള ത്രികോണനിർമ്മാണമാണിത്.

ഒരു മുഴുവൻ സംഖ്യ X തന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. മുഴുസംഖ്യാഭുജങ്ങളോടുകൂടിയ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ, ഒരു ഭുജം X ആയും കൊണ്ടു തന്നെ നിർമ്മിക്കണം.



ചിത്രം 12

ചിത്രത്തിൽ AD = X (ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം)

$$AB = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a} + a\right)$$

$$BD = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a} - a\right)$$

$$AC = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{b} + b\right)$$

$$DC = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{b} - b\right)$$

ഇവിടെ a, b എന്നിവ രണ്ടു മുഴുസംഖ്യകൾ ABD, ACD എന്ന രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ ചേർത്തുവെച്ചിരിക്കുന്നു. ത്രികോണം ABD യെ ACD യുടെ മേലേ വെക്കുകയാണെങ്കിൽ AB എന്ന ഭുജം AB' എന്ന സ്ഥാനത്തായിരിക്കും. ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ സാധുത പരിശോധിക്കാം

$$AB^2 = [\frac{1}{2}(\frac{x^2}{a} + a)^2] = \frac{1}{4}(\frac{x^4}{a^2} + a^2 + 2x^2)$$

$$= \frac{x^4}{4a^2} + \frac{a^2}{4} + \frac{x^2}{2} = \frac{x^4 + a^4 + 2a^2x^2}{4a^2}$$

$$BD^2 = [\frac{1}{2}(\frac{x^2}{a} - a)]^2 = \frac{1}{4}(\frac{x^4}{a^2} + a^2 - 2x^2)$$

$$= \frac{x^4}{4a^2} + \frac{a^2}{4} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^4 + a^4 - 2a^2x^2}{4a^2}$$

$$AB^2 - BD^2 = \frac{x^4 + a^4 + 2a^2x^2}{4a^2} - \frac{x^4 + a^4 - 2a^2x^2}{4a^2}$$

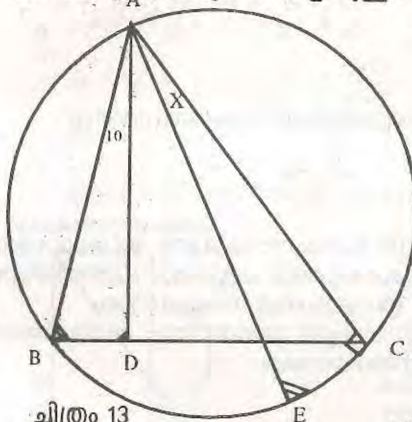
$$= \frac{x^4 + a^4 + 2a^2x^2 - x^4 - a^4 + 2a^2x^2}{4a^2}$$

$$= \frac{4a^2x^2}{4a^2} = x^2 = AD^2$$

ഇപ്രകാരം തന്നെ ത്രികോണം ACD യും പരിശോധിക്കാം. മേലേ ചെയ്ത ക്രിയയിൽ a ക്ക് പകരം b ആദേശിച്ചാൽ $AD^2 - CD^2 = X^2 = AD^2$ എന്ന് കിട്ടുന്നതാണ്.

ബ്രഹ്മഗുപ്ത സിദ്ധാന്തം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു ഭുജങ്ങൾ ഭാഗങ്ങളായുള്ള ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന് തുല്യാമയിരിക്കും ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരവും ആവരണവൃത്തത്തിന്റെ (CIRCUM CIRCLE) വ്യാസവും ഭാഗങ്ങളായുള്ള ദീർഘചതുരം.



ചിത്രം 13

ABC പ്രകൃതത്തിലെ ത്രികോണം AD അതിന്റെ ഉയരം (ALTITUDE). AE ആവരണവൃത്ത വ്യാസം. ത്രികോണങ്ങൾ ADB യും ACE യും പരിഗണിക്കുക. $\angle ADB = \angle Ace = 90^0$ (അർദ്ധവൃത്തത്തിലെ കോൺ)

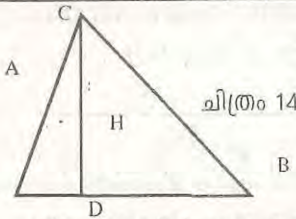
$\angle ABC = \angle AEC$ (ഒരേ വൃത്താംശത്തിലെ കോണുകൾ). അതിനാൽ $\angle BAD = \angle EAC$. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലും മൂന്ന് കോണുകളും തുല്യം ആകയാൽ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശങ്ങൾ.

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AB}$$ അപ്പോൾ

$$AC.AB = AE.AD$$

ത്രികോണം

ത്രിഭുജേ ഭുജയോർയോഗ-
സ്തദന്തരഗുണോ ഭുവാഹൃതോ ലബ്ധ്യാ
ദ്വിഃ സ്ഥാഭൂരൂനയുതാ
ദലിതാബാധേതയോഃ സ്യാതാം
സ്വാബാധാഭുജകൃത്യോ-
രന്തരമൂലം പ്രജായതേ ലംബഃ
ലംബഗുണം ഭൂമൂർദ്ധം
സ്പഷ്ടം ത്രിഭുജേഫലം ഭവതി

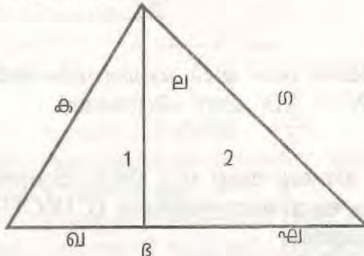


ചിത്രം 14

ചിത്രം 14ൽ AC, BC ത്രികോണത്തിന്റെ പാർശ്വങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ വാമദക്ഷിണബാഹുക്കൾ C എന്ന ബിന്ദു ത്രികോണത്തിന്റെ ശിഖരം (VERTEX) CD ലംബമാകുന്നു. AB യെ ത്രികോണത്തിന്റെ ആധാരമേന്നോ ഭൂമിയെന്നോ പറയുന്നു. AD, BD എന്നിവ ഖണ്ഡങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ആ ബാധകൾ.

ത്രികോണത്തിൽ രണ്ടു ബാഹുക്കളുടേയും യോഗാന്തരഘാതത്തെ ഭൂമികൊണ്ട് ഹരിച്ച് ഫലത്തെ രണ്ടേടത്ത് വെച്ച് ഭൂമിയിൽ കുറക്കുകയും കൂട്ടുകയും ചെയ്തർദ്ധിച്ചത്. ആ ബാഹുക്കളുടെ ആ ബാധകളാകുന്നു.

ബാഹുവർഗ്ഗത്തിൽ നിന്ന് സ്വകീയമായ ആ ബാധയുടെ വർഗ്ഗത്തെ കളഞ്ഞ് മൂലിച്ചത് ലംബമാകുന്നു. ഭൂമിയുടെ പകുതിയെ ലംബം കൊണ്ടു പെരുക്കിയത് ത്രികോണക്ഷേത്രഫലമാകുന്നു.



ചിത്രം 15

ഭ = ഭൂമി (ചിത്രം 15)
ക, ഗ -- പാർശ്വങ്ങൾ
ല — ലംബം
ഖ, ഘ — ഭുജങ്ങളുടെ ആ ബാധകൾ
ത്രികോണം (1) ൽ
ക = കർണ്ണം, ല = കോടി, ഖ = ഭുജം
ത്രികോണം (2) ൽ ഗ = കർണ്ണം, ല കോടി, ഘ = ഭുജം.

$ഖ^2 + ല^2 = ക^2$; $ഘ^2 + ല^2 = ഗ^2$

$(ഖ^2 + ല^2) — (ഘ^2 + ല^2) = ക^2 — ഗ^2$

അതായത് $ഖ^2 — ഘ^2 = ക^2 — ഗ^2$.

അതിനാൽ ആബാധാവർഗ്ഗാന്തരം ബാഹുവർഗ്ഗാന്തരത്തിന് തുല്യമെന്ന് സിദ്ധിച്ചു.

$$\frac{ക^2 — ഗ^2}{ഭ} = \frac{ഖ^2 — ഘ^2}{ഖ + ഘ} = ഖ - ഘ$$

ബാഹുവർഗ്ഗാന്തരത്തെ ഭൂമി കൊണ്ടുഹരിച്ചാൽ ആബാധാന്തരമാകുന്നു. ആ ബാധായോഗം ഭൂമി തന്നെ. ഈ യോഗത്തിൽ അന്തരത്തെകുറക്കുകയും കൂട്ടുകയും ചെയ്തർദ്ധിച്ചാൽ ചെറിയ ആബാധയും വലിയ ആബാധയും ഉണ്ടാകുമെന്നത് സംക്രമണന്യായം.

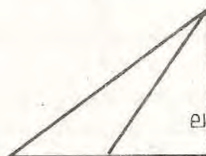
$(ക^2 — ഗ^2)$ എന്നതിനെ ഭൂമികൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ആബാധാന്തരം. അതിനെത്തന്നെ ബാഹുയോഗം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ബാഹ്വാന്തരമുണ്ടാകും.

$$\frac{ക^2 — ഗ^2}{ക + ഗ} = ക — ഗ$$

ബാഹുയോഗം ഭൂമിയേക്കാൾ വലിയതാകയാൽ ബാഹ്വാന്തരം സദാ ആബാധാന്തരത്തേക്കാൾ ചെറുതായിരിക്കും.

$ല^2 = ക^2 - ഖ^2$ അല്ലെങ്കിൽ $ഗ^2 — ഘ^2 = ല^2$ ഇതിൽ നിന്നു ലംബത്തെയുണ്ടാക്കാം.

ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ബാഹു മറ്റേ ബാഹുവിന്റേയും ഭൂമിയുടേയും വർഗ്ഗയോഗമൂലത്തേക്കാൾ അധികമായിരിക്കുമ്പോൾ ശിഖരത്തിൽ നിന്നുള്ള ലംബം ഭൂമിക്ക് പുറത്ത് വീഴുന്നു. അപ്പോൾ ആബാധകൾ ഋണമായും ധനമായും സങ്കൽപ്പിക്കാം. ചിത്രം 16



ചിത്രം 16

$$\text{ക്ഷേത്രഫലം} = \text{ല} \times \frac{\text{ഘ} - \text{ഖ}}{2} = \text{ല} \times \text{ഭൂമ്യർദ്ധം}.$$

അന്യോന്യ മൂലാഗ്രഗ സൂത്രയോഗാ–
ദ്വേണ്വോവർധേ യോഗഹൃതേച ലംബ
വംശൗ സ്വയോഹേന ഹൃതാവദീഷ്ടം
ഭൂഘ്നൗ ചലംബോ ഭയതഃ കുഖണ്ഡേ.

രണ്ടു തൂണുകളുടെ മാനങ്ങളെ തമ്മിൽ പെരുക്കിയതിനെ അവയുടെ മാനയോഗം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ആ തൂണുകളുടെ അടിയും അറ്റവും അന്യോന്യം ചേർക്കുന്ന സൂത്രങ്ങൾ കൂടുന്നവിടെ നിന്നുള്ള ലംബമാകുന്നു. രണ്ടു തൂണുകളുടേയും മാനങ്ങളെ അവയുടെ യോഗം കൊണ്ട് ഹരിച്ച് അ ദീഷ്ട ഭൂമി കൊണ്ട് പെരുക്കിയാൽ ഭൂഖണ്ഡങ്ങളുമുണ്ടാകും.

$$\text{ല} = \frac{\text{ഗ} \times \text{ഖ}}{\text{ഭൂ}} = \frac{\text{ക} \times \text{ഘ}}{\text{ഭൂ}}$$

$$\therefore \text{ല} \times \text{ക} = \frac{\text{ക} \times \text{ഗ} \times \text{ഖ}}{\text{ഭൂ}} \quad (1)$$

$$\text{ല} \times \text{ഗ} = \frac{\text{ക} \times \text{ഗ} \times \text{ഘ}}{\text{ഭൂ}} \quad (2)$$

$$(1) + (2) = \text{ല}\,(\text{ക} + \text{ഗ}) = \frac{\text{കഗ}}{\text{ഭൂ}}\,(\text{ഖ} + \text{ഘ})$$

$$\text{ഖ} + \text{ഘ} = \text{ഭൂമി}$$

$$\therefore \text{ല}\,(\text{ക} + \text{ഗ}) = \text{കഗ} \qquad \text{ല} = \frac{\text{കഗ}}{\text{ക+ഗ}}$$

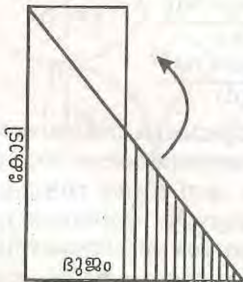
$$\text{ഖ} = \text{ഭൂ} \times \ = \frac{\text{ല}}{\text{ഗ}} \times \frac{\text{കഗ}}{\text{ക+ഗ}} = \frac{\text{ഭൂ}}{\text{ഗ}} \quad \text{ഭൂ} \frac{\text{ക}}{\text{ക+ഗ}}$$

$$\text{ഘ} = \text{ഭൂ} \times \ = \frac{\text{ല}}{\text{ക}} \times \frac{\text{കഗ}}{\text{ക+ഗ}} = \frac{\text{ഭൂ}}{\text{ക}} \quad \text{ഭൂ} \frac{\text{ഗ}}{\text{ക+ഗ}}$$

ചിത്രം 17

ഇങ്ങനെ രണ്ടുഖണ്ഡങ്ങൾ, ആബാധകൾ കിട്ടി.

സമകോണത്രികോണം



ചിത്രം 18

കർണ്ണമദ്ധ്യത്തിലൂടെ ലംബം വരച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന ത്രികോണത്തെ കർണ്ണത്തിന്റെ മറ്റേ പകുതിയോടു ചേർക്കുക. അപ്പോൾ ഒരു ആയത ചതുരശ്രം ഉണ്ടാകുന്നു. ആ ആയതചതുശ്രത്തിന്റെ കോടി ലംബം തന്നെ. ഭുജം ത്രികോണത്തിന്റെ ഭുജാർദ്ധവും.

ആയത ചതുരശ്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം = കോടി x ത്രികോണഭുജാർദ്ധം
= ആദ്യത്രികോണത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം

$$\text{ല} \times \frac{1}{2}\ \text{ഘ} + \text{ല} \times \frac{1}{2}\ \text{ഖ} = \frac{1}{2}\ \text{ല}\,(\text{ഘ} + \text{ഖ})$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{ല} \times \text{ഭ} = \text{ലംബം} \times \text{ഭൂമ്യർദ്ധം}$$

ചാക്രികചതുർഭുജം CYCLIC QUADRILATERAL

ബ്രഹ്മഗുപ്ത സിദ്ധാന്തപ്രകാരം ഒരു ചാക്രികചതുർഭുജത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം.

സർവ്വദോർയുതി ദലഞ്ചതുസ്ഥിതം
ബാഹുദിർ വിരഹിതം ചത ദ്വധാൽ
മൂലമസ്ഫുടഫലം ചതുർഭുജേ
സ്പഷ്ടമേവമുദിതം ത്രിബാഹുകേ.

എല്ലാ ഭുജങ്ങളുടേയും യോഗത്തെ അർദ്ധിച്ച് നാലേടത്തുവെച്ച് അവയിൽ നിന്ന് ഭുജങ്ങളെ ഓരോന്നായിക്കളഞ്ഞു കിട്ടുന്നവയെ ഒന്നായി പെരുക്കി മൂലിച്ചാൽ ചതുരശ്രത്തിൽ അസ്ഫുടക്ഷേത്രഫലവും ത്രികോണത്തിൽ സ്പഷ്ടഫലവുമുണ്ടാകും. a, b, c, d എന്നിവ ചതുർഭുജഭാഗങ്ങളാണെങ്കിൽ

ഭുജയോഗം $= a + b + c + d$

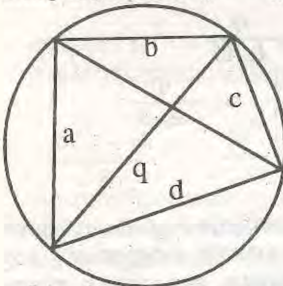
ഭുജയോഗാർദ്ധം $= \frac{a + b + c + d}{2} = S$

$\sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$ എന്ന തത്വം ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ വിശദീകരിക്കുന്നു.

ഈ തത്വം ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ സ്ഥാപിച്ച് ആയിരം വർഷങ്ങൾ കഴിഞ്ഞിട്ടത്രേ യൂറോപ്പിൽ ഇത് കണ്ടെത്തിയത്. 1619 ലാണ് സ്നെൽ (W.snell) ഈ സൂത്രം പ്രഖ്യാപിച്ചത്.

ബ്രഹ്മഗുപ്തന് ഒരു പിഴവ് പറ്റി അഥവാ ഒരു വസ്തുത വ്യക്തമാക്കിയില്ല. ഈ സൂത്രം ചാക്രിക ചതുർഭുജത്തിന് മാത്രമേ അനുയോജ്യമാകയുള്ളൂ എന്ന് പറഞ്ഞില്ല. തന്മൂലം പ്രഥമവീക്ഷണത്തിൽ ഈ സൂത്രം ചാക്രികമല്ലാത്ത ചതുർഭുജങ്ങൾക്കും ബാധകമാകുമെന്ന ഒരു ധാരണക്ക് കാരണമായിത്തീർന്നു. പിൽക്കാലക്കാർ ഈ വാക്യം ഇതരചതുർഭുജങ്ങൾക്ക് ബാധകമല്ലെന്ന് മനസ്സിലാക്കിയപ്പോൾ ആ പണ്ഡിതശ്രേഷ്ഠനെ വിഡ്ഢിയെന്നും പിശാചെന്നും അപഹസിക്കുകയുണ്ടായി. യോ (സൗമൂർക്കമിശാപോവാ എന്ന പദപ്രയോഗം ബുദ്ധിപൂർവ്വം ആ അപഹാസകന്മാർ ഒരു നന്മ ചെയ്തു. വ്യക്തിയുടെ നാമം വ്യക്തമാക്കിയില്ല. അതിന് നന്ദി.

ചതുർഭുജത്തിന്റെ കർണ്ണങ്ങൾ ബ്രഹ്മഗുപ്തസിദ്ധാന്തം



ചിത്രം 19

ഓരോ കർണ്ണത്തിന്റേയും ഇരുവശങ്ങളിലുമുള്ള ഭുജങ്ങൾ അന്യോന്യം പെരുക്കി തുക കാണുക. ആ തുകകൾ തമ്മിൽ പെരുക്കുക. മറ്റേ കർണ്ണത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളി ലുമുള്ള ഭുജങ്ങളെ പെരുക്കി തുക കാണുക. ഈ തുക കൊണ്ടു മുൻ പെരുക്കത്തെ ഹരിക്കുക. ഹരിതഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കർണ്ണമായിരിക്കും.

$$= \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{(ad + bc)}^{1/2} = p$$

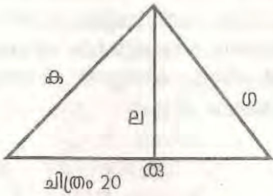
$$= \frac{(ab + bc)(ac + bd)^{1/2}}{(ad + cd)} = q$$

ത്രികോണത്തെ സമചതുരമാക്കുക, വൃത്തത്തെ സമചതുരമാക്കുക, സമചതുരത്തെ വൃത്തമാക്കുക, സമചതുരത്തിന്റെ ഇരട്ടി ക്ഷേത്രഫലമുള്ള ചതുരമുണ്ടാക്കുക, സമചതുരത്തെ N മടങ്ങാക്കുക, അതുല്യസമചതുരങ്ങളെ ചേർക്കുക എന്ന് തുടങ്ങി ക്ഷേത്രഫലസംബന്ധിയായ പല കാര്യങ്ങളും ജൈനഗണിതപണ്ഡിതന്മാരുടേയും പിൽക്കാലത്തുള്ളവരുടേയും കൃതികളിൽ വിസ്തരിച്ചിട്ടുണ്ട്. $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, π മുതലായ അപരിമേയങ്ങളുടെ വിലയും ഏകദേശം കൃത്യമായിത്തന്നെ അവർ ഊഹിച്ചു മനസ്സിലാക്കി ഗണനങ്ങളിൽ പ്രയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ബ്രഹ്മഗുപ്തസിദ്ധാന്തം ത്രികോണങ്ങളിൽ

ബ്രഹ്മഗുപ്തസിദ്ധാന്തം ത്രികോണത്തിലേക്കും ബാധകമാക്കാം. വൃത്തഗതചതുരശ്രത്തിന്റെ ഒരു ബാഹുശൂന്യമെന്ന് കൽപ്പിച്ചാൽ ത്രികോണക്ഷേത്രഫലസൂത്രം കിട്ടും. ഏത് ത്രികോണവും വൃത്തഗതമാകയാൽ ഈ സൂത്രം എല്ലാ ത്രികോണങ്ങൾക്കും അനുയോജ്യമാകും.

ലംബവും ആബാധകളും വരുത്തുന്ന സൂത്രത്തിലെപ്പോലെ ഝ ഭൂമിയും ക, ഗ ബാഹുക്കളും ല ലംബവും ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവർഗ്ഗം ല^2 എങ്കിൽ



ചിത്രം 20

$$ല^2 = ക^2 - \tfrac{1}{2}\{ഝ + \frac{ക^2 - ഗ^2}{ഝ}\}^2$$

$$4ഝ^2 ല^2 = 4ക^2ഝ^2 - 4ഝ^2 \tfrac{1}{4}(\frac{ഝ^2 + ക^2 - ഗ^2}{ഝ})^2$$

$$= 4ക^2ഝ^2 - (ഝ^2 + ക^2 - ഗ^2)^2$$

$$= \{2കഝ + (ഝ^2 + ക^2 - ഗ^2)\}\{(2കഝ - (ഝ^2 + ക^2 - ഗ^2)\}$$

$$= \{(ക^2 + ഝ^2 + 2കഝ) - ഗ^2\}\{ഗ^2 - ക^2 + ഝ - 2കഝ)\}$$

$$= \{(ക + ഝ)^2 - ഗ^2\}\{ഗ^2 - (ക - ഝ^2)\}$$

$$= (ക + ഝ + ഗ)(ക + ഝ - ഗ)(ഗ + ക - ഝ)(ഗ - ക + ഝ)$$

ക + ഝ + ഗ = 2 ഭ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$4ഝ^2ല^2 = 2ഭ(2ഭ - 2ഗ)(2ഭ - 2ഝ)(2ഭ - 2ക)$$

$$= 16ഭ(ഭ - ഗ)(ഭ - ഝ)(ഭ - ക)$$

$$(\frac{ഝല}{2})^2 = ഭ(ഭ - ക)(ഭ - ഝ)(ഭ - ഗ)$$

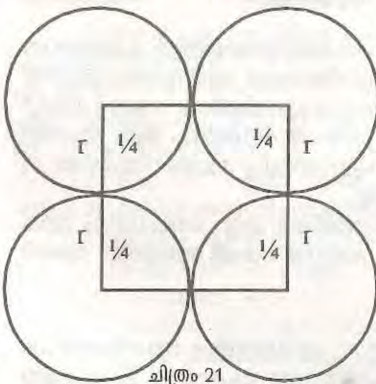
ഝ ഭൂമിയുടെ മാനവും ല ലംബവുമാകയാൽ

$\frac{ഝല}{2}$ = ത്രികോണത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം.

$$(ക്ഷേ.\ ഫലം)^2 = ഭ(ഭ - ക)(ഭ - ഗ)(ഭ - ഝ)$$

$$\therefore ക്ഷേത്രഫലം = \sqrt{ഭ(ഭ - ക)(ഭ - ഗ)(ഭ - ഝ)}$$

മഹാവീരന്റെ ഒരു പ്രശ്നം



ചിത്രം 21

നാല് വൃത്തങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ നാല് നാണ്യങ്ങൾ തൊട്ടുതൊട്ടുരണ്ടുവരിയിൽ കിടന്നാൽ അവ വലയം ചെയ്യുന്ന ഒഴിഞ്ഞ സ്ഥലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം എത്ര?

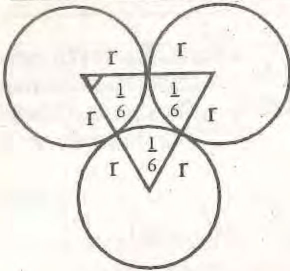
വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ ചേർന്ന ഒരു വ്യാസമാണ് ചതുരത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗമെന്ന് ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് വ്യക്തമാണല്ലൊ ആ ചതുരത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. നാലു വൃത്തങ്ങളുടേയും 1/4 ഭാഗം വീതം ചതുരത്തിൽ പെട്ടിട്ടുണ്ട്

ആകയാൽ ചതുരത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലത്തിൽ നിന്നും ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കിഴിച്ചാൽ ഒഴിഞ്ഞ സ്ഥലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കിട്ടും.

$$D^2 - \pi r^2 = 4r^2 - \pi r^2 = r^2(4 - \pi)$$

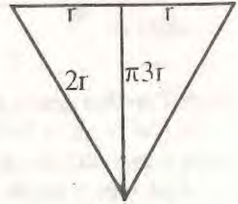
ഇതേപോലെ മൂന്ന് വൃത്തങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ നാണ്യങ്ങൾ അന്യോന്യം മുട്ടിയിരിക്കുമ്പോൾ നടുവിലുള്ള ഒഴിവുസ്ഥലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലമെത്ര?

വൃത്തവ്യാസത്തിന് തുല്യമായ ഭുജങ്ങളുള്ള ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. ഓരോ വൃത്തത്തിന്റേയും 60/360 അതായത് 1/6 ഭാഗം ആ ത്രികോണ



ചിത്രം 22

ത്തിനുള്ളിൽപ്പെടുമെന്ന് ചിത്രത്തിൽ നിന്നും വ്യക്തമാണല്ലോ. അപ്പോൾ മൂന്നു വൃത്തങ്ങളിൽ മൊത്തം $3 \times 1/6 = ½$ വൃത്തത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം ത്രികോണക്ഷേത്രഫലത്തിൽ നിന്നും കിഴിച്ചാൽ ഒഴിഞ്ഞ സ്ഥലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കിട്ടും.



ചിത്രം 23

ത്രികോണത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $\sqrt{3}r.r = \sqrt{3}.r^2$

$\frac{1}{2}$ വൃത്തത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $\frac{\pi r^2}{2}$

ഒഴിവുസ്ഥലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം = $\sqrt{3}r.^2 - \frac{\pi r^2}{2}$

$= \frac{2\sqrt{3}r^2 - \pi r^2}{3} = \frac{r^2}{3}\ (2\sqrt{3} - \pi)$

ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ഭുജം a എന്ന് തന്നിരുന്നാൽ മറ്റു ഭുജങ്ങൾ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{m} - m\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{m} + m\right)$$

ഇവിടെ m ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയാകുന്നു.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു ഭുജങ്ങൾ b, c എന്നിരിക്കട്ടെ. അവയുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ മറ്റേ വശത്തേക്കുള്ള ലംബം p ആണെങ്കിൽ ആ ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ (CIRCUM CIRCLE) വ്യാസം $\frac{bc}{p}$ ആയിരിക്കും.

ഭരതീയവിജ്ഞാനഭൂമി കുഴിച്ചു നോക്കിയാൽ പല അമൂല്യവിഭവങ്ങളും കണ്ടെത്താൻ കഴിയും, പ്രത്യേകിച്ചും ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ ചില വസ്തുതകൾ കൂടി വ്യക്തമാക്കുന്നത് വിജ്ഞാനപ്രദവും ഗണിതവിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ഉപയോഗപ്രദവുമായിരിക്കും. നമ്മുടെ പൂർവ്വീകന്മാരുടെ ബൗദ്ധികോൽക്കർഷത്തെക്കുറിച്ച് ഒരു ധാരണയുണ്ടാക്കാനും അത് സഹായിക്കും. യൂറോപ്യൻ വിജ്ഞാനത്തിന്റെ ധവളിമയിൽ കണ്ണുമഞ്ഞളിച്ച നമുക്ക് നമ്മുടെ ആചാര്യന്മാരുടെ യഥാർത്ഥ വലിപ്പം കാണാൻ കഴിഞ്ഞിട്ടില്ല.

പൂർവ്വീകന്മാരുടെ മസ്തിഷ്കം ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ എല്ലാ ശാഖകളിലും വ്യാപരിച്ചിട്ടുണ്ടെന്ന് മുമ്പേ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അതിലെ ഒരു ഭാഗമായ ശ്രേഢി അല്ലെങ്കിൽ ശ്രേണി (SERIES) യെക്കുറിച്ച് അൽപ്പം പ്രതിപാദിക്കാം.

ശ്രേണീ വിഹാരം

ഒരു നിയമത്തിന് വിധേയമായി തുടർന്നു വരുന്ന പല സംഖ്യകളെ ശ്രേണിയെന്ന് പറയുന്നു. ഒരു ശ്രേണിയിൽ വരുന്ന ഒന്നിലധികം അക്കങ്ങളുടെ ആകത്തുക കാണുകയെന്നതാണ് ഈ വിഭാഗത്തിലെ പ്രശ്നം.

ആദ്യമായി ഇതിലുപയോഗിക്കുന്ന സാങ്കേതിക പദങ്ങളുമായി പരിചയപ്പെടാം.
സങ്കലനം ചെയ്യാനുള്ള ശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദം (FIRST TERM) - ആദ്യം അല്ലെങ്കിൽ മുഖം അവസാനപദം (LAST TERM) - അന്ത്യം പദങ്ങളുടെ എണ്ണം (NO. OF TERMS) - ഗച്ഛം ശ്രേണിയുടെ ആകെത്തുക (SUM OF TERMS) - സർവ്വധനം അല്ലെങ്കിൽ സംകലിതം. രണ്ടുപദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം (DIFFERENCE) – ചയം കൂട്ടുമ്പോൾ ചയം, കുറക്കുമ്പോൾ ക്ഷയം അല്ലെങ്കിൽ ഋണചയം. സംഖ്യയെ പെരുക്കുമ്പോൾ പെരുക്കുന്ന ഘടകം - ഗുണം, ഗുണകം. 1 + 2 + 3 + 4 .... എന്നിങ്ങനെയുള്ള പ്രകൃതി സംഖ്യാശ്രേണിക്ക് ഏകാദ്യേകോത്തര സംഖ്യ എന്ന് പേർ. ഇഷ്ട ഗച്ഛം വരെ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സംഖ്യക്ക് ആദ്യസംകലനം എന്ന് പേർ. ഇവിടെ അന്ത്യവും ഗച്ഛവും

ഒന്ന് തന്നെ എന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഗച്ഛത്തെ 1, 2, 3 ..... തുടങ്ങി അന്ത്യം വരെ സങ്കൽപിച്ച് സങ്കലനം ചെയ്താൽ ഗച്ഛത്തോളം സങ്കലിതങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. ഇവയെല്ലാം സങ്കലനം ചെയ്യുന്നതിന്ന് ദ്വിതീയസങ്കലനം എന്ന് പേർ. ഇങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന ഗച്ഛത്തോളം ദ്വിതീയ സങ്കലിതങ്ങളെ പിന്നേയും സങ്കലനം ചെയ്യുന്നതിന്ന് തൃതീയ സങ്കലനമെന്ന് പേർ.

ഗച്ഛം ഗ എങ്കിൽ

ആദ്യസങ്കലനം — സം(ഗ)

ദ്വിതീയ സങ്കലനം — $സം_2$ (ഗ)

തൃതീയ സങ്കലനം — $സം_3$ (ഗ)

എന്നിങ്ങനെ ചിഹ്നം കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഏകാദ്യേകോത്തര സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളേയും ഘനങ്ങളേയും വർഗ്ഗവർഗ്ഗാദികളേയും സങ്കലനം ചെയ്യാം. എങ്ങനെയെന്നാൽ ഗച്ഛം ഗ എങ്കിൽ ഈ സങ്കലനങ്ങളെ സം(ഗ), സം($ഗ^2$), സം($ഗ^3$) എന്നീ ചിഹ്നങ്ങളാൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. മാതൃക കാണുക.

സം (6)	=	1+2+3+4+5+6	=	21
$സം_2$ (6)	=	1+3+6+10+15+21	=	56
$സം_3$ (6)	=	1+4+10+20+35+56	=	126
സം (6^2)	=	$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$		
	=	1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36	=	91
സം (6^3)	=	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$		
		1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216	=	441

ഈ അടയാളങ്ങൾ പാശ്ചാത്യാനുകരമാണ് ഭാരതത്തിൽ ഇത്തരം സൂചനാചിഹ്നങ്ങൾ ഇല്ലാതിരുന്നതിനാൽ ഈ ഗണിതവിഭാഗം വേണ്ടത്ര വളർന്നില്ല എന്നത് ഒരു ദുഃഖസത്യമാണ്.

സങ്കലിതങ്ങൾ

പദത്തോട് ഒന്ന് (1) ചേർത്തതിനെ പദാർദ്ധം കൊണ്ടു പെരുക്കിയത് സങ്കലിതം – ഏകാദിസംഖ്യായോഗം.

സം (ഗ) = 1 + 2 + 3 + 4 + ... (ഗ - 1) + ഗ (1)

എല്ലാ പദങ്ങളും ഗ എങ്കിൽ അധികം ചേർന്നത്.

(ഗ - 1) + (ഗ - 2) + (ഗ - 3) + ... 2 + 1 (2)

(2) + ഗ = (1) എന്ന് വ്യക്തം

എല്ലാം ഗ എങ്കിൽ അതിന്റെ സങ്കലിതം $ഗ^2$

∴ സം(ഗ) = $ഗ^2$ — (2); (2) = (1) — ഗ

∴ സം(ഗ) = $ഗ^2$ — (സം(ഗ) — ഗ)

$ഗ^2$ — സം(ഗ) + ഗ

2 x സം(ഗ) = $ഗ^2$ + ഗ = ഗ(ഗ + 1)

∴ സം(ഗ) = $\frac{ഗ(ഗ+1)}{2}$ (ആര്യഭടൻ)

ഇതിന്റെ ആംഗലരൂപം. ആകെത്തുക S എന്ന് കരുതുക

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots (n - 1) + n$$
$$S = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots 2 + 1$$
$$2S = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) \ldots (n + 1) + (n + 1) = (n + 1)\,n$$
$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

ദ്വിതീയസങ്കലിതം

പദത്തോട് 2 ചേർത്തതിനെ പദം കൊണ്ടു പെരുക്കി 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത് ദ്വിതീയസങ്കലിതം. (ഗക്ക് പകരം n; സം എന്നതിന് പകരം S)

$S^2(n) = \frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)+\ldots\ldots\frac{1}{2}2.3+\frac{1}{2}1.2$

ഓരോ പദത്തിലും വലത്തുള്ള $n+1,\ n,\ n-1$ എന്നിവ $n+1$ ആയെങ്കിൽ കിട്ടുന്ന യോഗം

$= \frac{1}{2}(n+1)\{n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots\ldots\ldots 2+1\}$

$= \frac{1}{2}(n+1)$ (ആദ്യസംഗലിതം) $= \frac{1}{2}(n+1)\, n\, \frac{(n+1)}{2}$

$= \frac{1}{4}\, n(n+1)^2$ (A)

ഇതിൽ $n+1$ എന്ന ഗുണകാരസങ്കൽപ്പത്തിൽ അധികം ചേർന്നത്

$$= 0 + \frac{(n-1)}{2} + \frac{2(n-2)}{2} + \frac{3(n-3)}{2} + \ldots\ldots \frac{(n-2).2}{2} + \frac{(n-1).1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\{(n-1) + 2(n-2) + 3(n-3) + \ldots\ldots (n-2)2 + (n-1)\}$$

$$= (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) + \ldots\ldots\ldots \quad 3+2+1$$

$$\frac{1}{2}\left[\begin{array}{r} +(n-2)+(n-3)+(n-4)+\ldots\ldots\ldots 3+2+1 \\ +(n-3)+(n-4)+\ldots\ldots\ldots 3+2+1 \\ +(n-4)+\ldots\ldots\ldots 3+2+1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 3+2+1 \\ +2+1 \\ +1 \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\{\text{സം}(n-1)+\text{സം}(n-2)+\text{സം}(n-3)+\ldots\ldots\text{സം}(2)+\text{സം}(1)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\text{സം}^2(\text{ഗ}) - \text{സം}(\text{ഗ})\}$$

ഇത് A_2 എന്ന തുകയിൽ സം^{2} (ഗ) എന്നതിനേക്കാൾ കൂടുതൽ ചേർന്നതാണ്.

$\therefore\ \text{സം}^2(\text{ഗ}) = \frac{1}{4}\text{ഗ}(\text{ഗ}+1)^2 - \frac{1}{2}\{\text{സം}^2(\text{ഗ}) - \text{സം}(\text{ഗ})\}$

$= \frac{1}{4}\text{ഗ}(\text{ഗ}+1)^2 - \frac{1}{2}\text{സം}^2(\text{ഗ}) + \frac{1}{2}\text{സം}(\text{ഗ})$

$\frac{3}{2}\,\text{സം}^2(\text{ഗ}) = \frac{1}{4}\text{ഗ}(\text{ഗ}+1)^2 + \frac{1}{2}\text{സം}(\text{ഗ})$

$= \frac{1}{4}\text{ഗ}(\text{ഗ}+1)^2 + \frac{1}{4}\text{ഗ}(\text{ഗ}+1)$

$= \frac{1}{4}\text{ഗ}\{(\text{ഗ}+1)^2 + (\text{ഗ}+1)\}$

$= \frac{1}{4}\text{ഗ}(\text{ഗ}^2+2\text{ഗ}+1+\text{ഗ}+1)$

$= \frac{1}{4}\text{ഗ}(\text{ഗ}^2+2+3\text{ഗ}+2)$

$= \frac{1}{4}\text{ഗ}(\text{ഗ}+1)\ (\text{ഗ}+2)$

$\therefore\ \text{സം}^2\text{ഗ} = \frac{1}{2.3}\ \text{ഗ}(\text{ഗ}+1)\ (\text{ഗ}+2)$

$= \frac{\text{ഗ}}{2}\ (\text{ഗ}+1)\ \frac{(\text{ഗ}+2)}{3}$

ആദ്യസങ്കലനം $\times\ \frac{(\text{ഗ}+2)}{3}$

ദ്വിതീയസങ്കലനം മറ്റൊരു വിധത്തിൽ കാണാം.

സം^{2}n $= \frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}(n-1)n+\frac{1}{2}(n-2)(n-1)+\ldots\ldots\frac{1}{2}\,2.3+\frac{1}{2}.1.2$

$2xS_2(n) = n(n+1)+(n-1)n+(n-2)(n-1)+\ldots\ldots 2.3 + 1.2$

ഓരോ പദവും രണ്ടുപദങ്ങളുടെ ഭേദകമായെഴുതാം

ഉദാ: $n(n+1) = n(n+1) \times \frac{(n+2)-(n-1)}{3}$

$$= \frac{n(n+1)\ (n+2)}{3} - \frac{(n-1)n\ (n+1)}{3}$$

ഇനി n ന് പകരം $(n-1)$ എന്നാക്കി തുടരുക.

$$(n-1)n = \frac{(n-1)n\ (n+1)}{3} - \frac{(n-2)\ (n-1)n}{3}$$

$(n-2)(n-1) = \frac{(n-2)(n-1)n}{3} - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{3}$

$(n-3)(n-2) = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{3} - \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{3}$

x x x x x

$3 \times 4 = \frac{3 \times 4 \times 5}{3} - \frac{2 \times 3 \times 4}{3}$

$2 \times 3 = \frac{2 \times 3 \times 4}{3} - \frac{1 \times 2 \times 3}{3}$

$1 \times 2 = \frac{1.2.3}{3} - 0$

ഇവിടെ ഇടത് പക്ഷം ദ്വിതീയ സങ്കലിതത്തിന്റെ ഇരട്ടി. വലത് പക്ഷം പദങ്ങൾ അന്യോന്യം തുലിതമായി നശിച്ച്

ഒടുവിൽ $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ മാത്രം ശേഷിക്കും.

∴ 2 x സം^{2} (ഗ) = $\frac{1}{3}$ ഗ(ഗ+1)(ഗ+2)

സം^{2} (ഗ) = $\frac{1}{2.3}$ ഗ(ഗ+1)(ഗ+2) (ആര്യഭടൻ)

ദ്വിതീയ സങ്കലിതത്തിന്റെ 2 x 3 മടങ്ങ്

$= n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1) + ... + 1.2.3$

ഇതിൽ ആദ്യപദം

$n(n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2) \times \frac{(n+3)-(n-1)}{4}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$

മുൻപത്തെപ്പോലെ ചെയ്താൽ

തൃതീയ സങ്കലനം = $\frac{1}{2.3.4}$ $n(n+1)(n+2)(n+3)$

എല്ലാം കൂടി ഇങ്ങനെ രേഖപ്പെടുത്താം.

സം (n) = $\frac{1}{2}$ $n(n+1)$

സം^{2} (n) = $\frac{1}{2.3}$ $n(n+1)(n+2)$

സം^{3} (n) = $\frac{1}{2.3.4}$ $n(n+1)(n+2)(n+3)$

സം^{4} (n) = $\frac{1}{2.3.4.5}$ $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ സങ്കലിതങ്ങളും സങ്കലിതൈക്യങ്ങളും

സംഖ്യ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ആദ്യസം	$\frac{1.2}{2}$	$\frac{2.3}{2}$	$\frac{3.4}{2}$	$\frac{4.5}{2}$	$\frac{5.6}{2}$	$\frac{6.7}{2}$	$\frac{7.8}{2}$	$\frac{8.9}{2}$	$\frac{9.10}{2}$
	1	3	6	10	15	21	28	36	45
ദ്വിതീയസം	$\frac{1.2.3}{6}$	$\frac{2.3.4}{6}$	$\frac{3.4.5}{6}$	$\frac{4.5.6}{6}$	...	...	...	...	$\frac{9.10.11}{6}$
	1	4	10	20	35	56	84	120	165
തൃതീയസം	$\frac{1.2.3.4}{24}$	$\frac{2.3.4.5}{24}$	...	...	...	...	...		$\frac{9.10.11.12}{24}$
	1	5	15	35	70	126	210	330	495

ആദ്യവർഗ്ഗസങ്കലിതം (സം (ഗ^2)

അന്ത്യപദം n^2 എന്നിരിക്കട്ടെ

സം(n^2) $= 1^2+2^2+3^2+4^2+........(n-1)^2+n^2$

$= 1(2-1)+2(3-1)+3(4-1)+......(n-1)(n-1)+n(n+1-1)$

$= 1.2+2.3+3.4+4.5+....(n-1)n+n(n+1)-(1+2+3+.......n)$

$=$ 2 x സം^{2}(n) — സം(n)

$= 2 \times \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6} n(n+1)\{2(n+2)-3\}$

$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{n(n+1)}{2} . \frac{2n+1}{3}$

ആദ്യസങ്കലിതം x $\frac{2n+1}{3}$ (ബഹുഗുപ്തനും ഭാസ്കരനും)

ഘനസങ്കലിതം — സം(ഗ^3)

അന്ത്യപദം n^3 എന്നിരിക്കട്ടെ. സം(ഗ^3) $= 1^3+2^3+3^3+ .... n(n+1)(n+2)$
$= n^3+3n^2+2n$

$= n^3+3n(n+1)-n$

$\therefore n^3 = n(n+1)(n+2)-3n(n+1)+n$

ഇതിൽ n ന് പകരം $n-1, n-2, ... 2, 1$ എന്ന് വെക്കുക.

$(n-1)^3 = (n-1)n(n+1) - 3(n-1)n + (n-1)$
$(n-2)^3 = (n-2)(n-1)n - 3(n-2)(n-1) + (n-2)$
$(n-3)^3 = (n-3)(n-2)(n-1) - 3(n-3)(n-2) + (n-3)$

$3^3 = 3.4.5 - 3.3.4 + 3$
$2^3 = 2.3.4 - 3.2.3 + 2$
$1^3 = 1.2.3 - 3.1.2 + 1$

ഇതിൽ ഇടത് പക്ഷം ഘനസംഗലിതമാകുന്നു. n(n+1) (n+2) എന്നത് ദ്വിതീയ സങ്കലിതത്തിന്റെ 6 ഇരട്ടിയാണ്. അതിൽ n എന്നതിന് 1 മുതൽ n വരെ വിലകൽപ്പിച്ച് എല്ലാം കൂടി കൂട്ടിയാൽ തൃതീയ സങ്കലിതത്തിന്റെ 6 മടങ്ങു വരും. 3n(n+1) എന്നത് പ്രഥമസങ്കലിതത്തിന്റെ 6 മടങ്ങാകുന്നു. ഇതിൽ n എന്നതിന് 1 മുതൽ n വരെ വില കൽപ്പിച്ച ഫലമെല്ലാം കൂട്ടിയാൽ 6 മടങ്ങു ദ്വിതീയ സങ്കലിതം.
n ന് 1 മുതൽ n വരെ കൂട്ടിയാൽ പ്രഥമസങ്കലിതം.

$n^3 = n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)+n$

ഘനസങ്കലിതം = 6 x തൃതീയസങ്കലിതം — 6 x ദ്വിതീയ സങ്കലിതം + പ്രഥമ സങ്കലിതം

സം (n^3) $= \frac{6}{24} n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{6}{6} n(n+1)(n+2) + \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{1}{4} n(n+1)\{(n+2)(n+3)-4(n+2)+2\}$

$= \frac{1}{4} n(n+1)(n^2+5n+6-4n-8+2)$

$= \frac{1}{4} n(n+1)(n^2+n)$

$$= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

$$= \{½ n(n+1)\}^2.$$

പ്രഥമസംഗലിതവർഗ്ഗം

ഗുണോത്തരശ്രേണി

വിഷമേഗച്ഛേവ്യേകേ
ഗുണകഃ സ്ഥാപ്യഃ സമേ്ഽർദ്ധിതേവർഗ്ഗഃ
ഗച്ഛക്ഷന്തമന്ത്യാ
ദ്വ്യസ്തം ഗുണവർഗ്ഗജം ഫലം യത്തൽ
വ്യേകം വ്യേകഗുണോദ്ധൃത–
മാദിഗുണം സ്വാദ് ഗുണോത്തരേഗണിതം.

ഗച്ഛം വിഷമമായിരിക്കുമ്പോൾ 1 കുറച്ച് ഗുണകം വെക്കുക. ഗച്ഛം സമസംഖ്യയാകുമ്പോൾ അർദ്ധിച്ച് വർഗ്ഗം വെക്കുക. ഇങ്ങനെ ഗച്ഛം ഒടുങ്ങുവോളം ചെയ്യുക. അവസാനം യാതൊന്ന് അത് മുതൽ വ്യസ്തമായി ക്രിയ ചെയ്തു കിട്ടുന്നത് ഗുണവർഗ്ഗഫലം.

അതിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ച് 1 കുറച്ച് ഗുണം കൊണ്ടുഹരിച്ച് കിട്ടിയതിനെ മുഖം കൊണ്ട് പെരുക്കിയാൽ ഗുണോത്തരം ശ്രേണിയിൽ ഗണിത (സങ്കലന) ഫലമാകുന്നു

മുഖം = മ; ഗുണം = ഗു; ഗച്ഛം = ഗ; സർവ്വധനം = ധ

ധ = മ + മഗു + മഗു^{2} + മഗു^{3} + ... മ.ഗു$^{ഗ-2}$ + മ.ഗു$^{ഗ-1}$

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... ar^{n-2} + a.r^{n-1}$$

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 + ... ar^{n-2} + a.r^{n-1} + a.r^n$$

$$S(r-1) = ar^n - a = a(r^n - 1)$$

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

r^n എന്നത് ഗുണവർഗ്ഗഫലം. ഇതിൽ 1 കുറച്ച്, 1 കുറച്ച ഗുണം കൊണ്ട് ഹരിച്ച് മുഖം കൊണ്ട് പെരുക്കിയത് സർവ്വധനം ധ (S)

വിഷമേഗച്ഛേ — ഗുണകാരത്തെ അതിനെ കൊണ്ടുതന്നെ പലവട്ടം ഗുണിക്കുക. ഉദാഹരണമായി 3^{11}, മൂന്നേഘാതം പതിനൊന്ന് ക്രമപ്രവൃദ്ധമായ പ്രക്രിയ കാണുക.

3^{11} — മൂന്നേഘാതം പതിനൊന്ന്

1. 11ൽ നിന്ന് 1 മാറ്റിവെക്കുക - ബാക്കി 10
2. 10 സമം - അർദ്ധിക്കുക - 5
3. 5 വിഷമം - ഒരു ഗുണകം മാറ്റി വെക്കുക - ബാക്കി 4
4. 4 സമം - അർദ്ധിക്കുക - 2
5. 2 സമം - അർദ്ധിക്കുക - 1

ഒരു ഗുണകം - ഗുണകം അവസാനിച്ചു
ഇനി ക്രിയ ഈ രീതിയിൽ പിന്നോട്ട് $3^1 = 3$.

5. അതിനെ വർഗ്ഗിക്കുക. $3^2 = 9$
4 അതിനെ വർഗ്ഗിക്കുക. $3^4 = 9x9=81$.
3 മാറ്റി വെച്ച ഗുണം കൊണ്ടു പെരുക്കുക. $3^5 = 81x3=243$.
2. അതിനെ വർഗ്ഗിക്കുക. $243 \times 243 = 59049 (3^{10})$.
1. മാറ്റിവെച്ച ഗുണകം കൊണ്ടു പെരുക്കുക.
$3^{10} x 3 = 3^{11} = 59049 \times 3 = 177147$

ഒരു പ്രശ്നം

പൂർവ്വം വരാടകയുഗം

യേനദ്വിഗുണോത്തരം പ്രതിജ്ഞാതം
പ്രത്യഹമർത്ഥിജനായസ
മാസേനിഷ്കാന്ദ ദാതികതി.

അർത്ഥികൾക്ക് ആദ്യം 2 വരാടകം കൊടുത്തു. പിറ്റേന്ന് 4. ഇങ്ങനെ ദിനം പ്രതി ഇരട്ടിച്ച് ഒരു മാസം കൊടുത്താൽ എത്ര നിഷ്കം കൊടുത്തു.

ധ $= 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots 2^{30}$

$$= 2\frac{2^{30}-1}{2-1} = 2(2^{30}-1)$$

$30 \rightarrow 15.15 \rightarrow 15$ വിഷമം $15-1=14 \rightarrow 7$. വിഷമം $7-1=6$ സമം $\rightarrow 3.3$ വിഷമം $3-1=2$ സമം 1.1. ഇനി ഇതിന്റെ പ്രതിലോമം ക്രിയ ചെയ്യുക. $2^1 = 2$ വർഗ്ഗിച്ച് $2^2 = 4$. ഗുണം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് $2^3 = 4 \times 2 = 8$ വർഗ്ഗിച്ച് $2^6 = 8 \times 8 = 64$ ഗുണിച്ച് $2^7 = 64 \times 2 = 128$; വർഗ്ഗിച്ച് $2^{14} = 128 \times 128 = 16384$ ഗുണിച്ച് $2^{15} = 16384 \times 2 = 32768$ വർഗ്ഗിച്ച് $2^{30} = 32768 \times 32768 = 1073741824$ ഇതിൽ നിന്ന് 1 കളഞ്ഞു 1073741823 മുഖം കൊണ്ടു പെരുക്കിയത് 2147483646 = ധനം

ഗുണോത്തരശ്രേഢിയിലെ ഗുണം 1ൽ കുറഞ്ഞ സംഖ്യയാണെങ്കിൽ

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^{n-1}$$

$$Sr = a + r + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$S(1-r) = a - ar^n = a(1-r^n)$$

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

ഇവിടെ n വലുതാകുമ്പോൾ r^n ശൂന്യമായിരിക്കും.

അപ്പോൾ $Sn = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}$

വില കാണുക :

0.3333 .... അനന്തം

$0.333\ldots\ldots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

ഇവിടെ മുഖം 3/10. ഗുണം = 1/10; ഗച്ഛം = അനന്തം

$$0.333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots\ldots$$

$$= 3.\frac{1}{10} + 3.\frac{1}{10^2} + 3.\frac{1}{10^3} + 3.\frac{1}{10^4} + \ldots\ldots$$

$$= 3(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \ldots\ldots)$$

$$= 3(\frac{1/10}{1-1/10}) = 3(\frac{1}{10} + \frac{10-1}{10})$$

$$= 3.\frac{1}{10}.\frac{10}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

വില കാണുക :

0.272727.............. അനന്തം

$0.272727\ldots\ldots = 0.27 + 0.0027 + 0.000027 + \ldots\ldots$

$$= \frac{27}{100} + \frac{27}{10000} + \frac{27}{1000000} + \ldots\ldots$$

$$= 27\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{1000000}+\ldots\ldots\right)$$

$$= 27\left(\frac{1/100}{1-1/100}\right)$$

$$= 27\left(\frac{1/100}{99/100}\right)$$

$$= 27.\frac{1}{100}.\frac{100}{99} = \frac{3}{11}$$

വില കാണുക :

$1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\ldots\ldots$ ഇവിടെ മുഖം = 1

ഗുണം = 2/3

$$1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots\ldots = \frac{1}{1-2/3} = \frac{1}{1/3} = 3$$

വില കാണുക :

3 + 33 + 333 + 3333 + 33333 + ... n സംഖ്യകൾ

$$= 3(1+11+111+1111+\ldots\ldots)$$

$$= \frac{3}{9}(9+99+999+9999+\ldots\ldots)$$

$$= \frac{3}{9}\{(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\ldots\ldots\}$$

$$= \frac{1}{3}(10+10^2+10^3+10^4+\ldots\ldots+10^n-n)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{10\times(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$$

$$= \frac{10}{27}(10^n-1)-\frac{1}{3}n$$

പ്രസ്തരണം (വികൽപം) മിശ്രണം

PERMUTATION - COMBINATION

പല വസ്തുക്കളെ കൂട്ടികലർത്തി പലവിധത്തിൽ സംവിധാനം ചെയ്യുന്ന രീതികളെ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന ഒരു ഗണനമാർഗ്ഗമാണ് പ്രസ്തരണവും (PERMUTATION) മിശ്രണവും (COMBINATION). ഇന്ന് ആംഗലരീതിയിൽ nPr, nCr എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്ന വസ്തുതകൾക്കുള്ള പൊതുവാക്യം ആദ്യമായി അവതരിപ്പിച്ചത് മഹാവീരനാണ്. ഭാസ്കരനും ഈ ശാഖ അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

പുരാതന ജൈനരുടേയും വേദകാലഭാരതീയരുടേയും ശ്രദ്ധ ഈ ഗണനവിഭാഗത്തിൽ പതിഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ഛന്ദസ്സുകളിലെ ഗുരുലഘ്വാക്ഷര ക്രമീകരണത്തെപ്പറ്റി ചിന്തിച്ചപ്പോഴും സാഹിത്യരചനകളിൽ പലരസങ്ങൾ സംയോജിക്കുന്ന ഭിന്നരീതികൾ പഠിച്ചപ്പോഴും സുഗന്ധധൂമങ്ങളുടെ കലർപ്പുകൾ പരിശോധിച്ചപ്പോഴും ഈ ഗണനതത്വങ്ങൾ ആവിഷ്കരിക്കപ്പെടുകയായിരുന്നു.

പ്രശ്നം നേരിട്ടു കൈകാര്യം ചെയ്തുതന്നെ വിഷയം പഠിക്കാം.

ദ്വികാഷ്ടകാദ്യാംത്രിനവാഷ്ട കൈർവ്വാ
നിരന്തരം ദ്വാദിനപാവസാനൈ:
സംഖ്യാവിഭേദാ: കതിസംഭവന്തി
തൻ സംഖ്യകൈക്യാനിപൃഥക് വദാശു.

2, 8 ഇവകൊണ്ടും 3, 9, 8 എന്നിവ കൊണ്ടും 2 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങളെക്കൊണ്ടും

എത്ര സംഖ്യകളുണ്ടാവാം. അതും അവയുടെ യോഗവും എത്രയെന്ന് വെവ്വേറെ വേഗം പറയുക.

2 മുതൽ 9 വരെ എട്ടു അക്കങ്ങളാണുള്ളത്. അപ്പോൾ ഇവകൊണ്ടുണ്ടാവുന്ന സംഖ്യകൾ എട്ടു സ്ഥാനങ്ങളുള്ളവയായിരിക്കും. ഒരു സ്ഥാനത്ത് എട്ടിലേതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യ വരാം. അപ്പോൾ ആ ഒരു സ്ഥാനം എട്ടുവിധത്തിലാവാം. ആ എട്ടിലൊന്നെടുക്കുക. അതിന്റെ രണ്ടാം സ്ഥാനത്ത് ബാക്കിയുള്ള ഏഴക്കങ്ങളിൽ നിന്ന് ഏതെങ്കിലുമാവാം. ഏഴു വിധത്തിലാവാം. അപ്പോൾ എട്ടിൽ ഓരോന്നിനും ഈ ഏഴുവിഭേദങ്ങളുണ്ടാകുമ്പോൾ ഒട്ടാകെ 8x7 വിധത്തിലായി അതിലൊന്നെടുക്കുക. അതിന്റെ മൂന്നാം സ്ഥാനത്ത് ബാക്കിയുള്ള ആറക്കങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നായിരിക്കും. അതായത് ആറ് വിധത്തിലാവാം. അപ്പോൾ 8x7 വിഭേദങ്ങൾക്കും മൂന്നാം സ്ഥാനം നിറയുമ്പോൾ 8x7x6 വിഭേദങ്ങളുണ്ടായി. ഇങ്ങനെ മറ്റു ആറുസ്ഥാനങ്ങളെപ്പറ്റിയും ചിന്തിക്കുമ്പോൾ എട്ട് സ്ഥാനങ്ങളും നിറയുന്നതിന് 8x7x6x5x4x3x2x1 മാർഗ്ഗങ്ങളുണ്ടെന്ന് സിദ്ധിക്കുന്നു. ഇതിനെ ∠8 എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. വായിക്കുന്നത് "ഏകാദിഘാതം 8" (FACTORIAL 8) ∠8 = 40320. ഇത്രയും സംഖ്യകളുണ്ടാവാം.

ഇനി ഇവയുടെ യോഗം (ആകെത്തുക) കാണണം. ഒരക്കം ഒരു സ്ഥാനത്തിരിക്കട്ടെ. മറ്റു 7 അക്കങ്ങളെക്കൊണ്ടു ∠7 വിഭേദങ്ങളുണ്ടാവാം. അതായത് ∠7 സംഖ്യകളിൽ ആ അക്കം ആ പ്രത്യേകസ്ഥാനത്ത് വരുമെന്നർത്ഥം. ഇങ്ങനെ ആ അക്കം 8 സ്ഥാനത്തും ∠7 വിഭേദങ്ങളിലായി വരും. 6 എന്ന അക്കം എടുക്കുക. ആ അക്കം കൊണ്ടുസംഖ്യായോഗത്തിൽ വരുന്ന തുക = 66666666 x ∠7. ഇതേപോലെ ഓരോ അക്കത്തെക്കൊണ്ടും തുകയുണ്ടാകുന്നു. എല്ലാം കൂടി കൂട്ടിയാലുണ്ടാകുന്ന തുക

$$= (2 + 3 + \ldots\ldots + 9) \times 11111111 \times \angle 7$$

$$= 44 \times 11111111 \times \frac{\angle 8}{8}$$

$$= \underline{2\,4\,6\,3\,9\,9\,9\,9\,7\,5\,3\,6\,0}$$

ഇനി ചോദ്യത്തിലെ ആദ്യഭാഗം എടുക്കാം. അതിൽ 2, 8 എന്നീ രണ്ടക്കങ്ങൾ മാത്രം അതിനാൽ അതിൽ വരാവുന്ന വകഭേദങ്ങൾ. 1 x 2 = 2. അവയുടെ യോഗം (2 + 8) x 11. $\frac{\angle 2}{2}$ = 110. 3, 9, 8 എന്നീ അക്കങ്ങളെക്കൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന വിഭേദങ്ങൾ 1 x 2 x 3 = 6.

അവയുടെ യോഗം = $(3 + 9 + 8) \times 111 \times \frac{\angle 3}{3} = 4440$

<u>ഒരു കണക്ക് :</u>

പാശാം കുശാഹിസമരുക കപാലശൂലൈ:
ഖട്വാംഗശക്തി ശരപാപയുതൈർഭവന്തി
അന്യോന്യഹസ്തകലിതൈ: കതിമൂർത്തിഭേദാ:
ശംഭോർഹരേരിവഗദാരിസരോജശംഖൈ:

കയറ്, തോട്ടി, പാമ്പ്, ഡക്ക, തലയോട്, ശൂലം, യോഗദണ്ഡ്, ശക്തി, ശരം, ചാപം ഇവയെ പത്ത് കരങ്ങളിലും മാറ്റി ധരിച്ച് ശംഭുവിനും ഗദ, ചക്രം, പത്മം, ശംഖ്, ഇവയെക്കൊണ്ട് വിഷ്ണുവിനും എത്ര മൂർത്തിഭേദങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നു?

ശംഭുവിന്റെ മൂർത്തിഭേദം = ∠10 = 3628800

വിഷ്ണുവിന്റെ മൂർത്തിഭേദം = ∠4 = 24

ദ്വിദ്വേകഭൂപരിമിതൈ: കതിസംഖ്യകാ: സ്യു-
സ്താസാംയുതിശ്ചഗണകാ† ശു മമപ്രപക്ഷ്വ
അംഭോധികുംഭിശരഭൂതശരൈസ്തഥാം കൈ-
ശ്ചേദം കപാശമിതിയുക്തി വിശാരദോ† പി

(ഭൂമി = 1; അംഭോധി = 4; കുംഭി = 8; ശരം = 5; ഭൂതം = 5)

2, 2, 1, 1 ഈ അക്കങ്ങളെക്കൊണ്ടും 4, 8, 5, 5, 5 എന്നീ അക്കങ്ങളെക്കൊണ്ടും എത്ര സംഖ്യ ഉണ്ടാക്കാമെന്നും അവയുടെ യോഗം എത്രയാണെന്നും പറയൂ.

4, 8, 5, 5, 5 — ഈ കൂട്ടത്തിലെ മൂന്ന് 5 കൾക്ക് പകരം മൂന്ന് വിഭിന്നസംഖ്യ

കളായിരുന്നെങ്കിൽ ആകെ സംഖ്യാവകഭേദങ്ങൾ $\angle 5$ എന്നാൽ ഇവിടെ മൂന്നും ഒരേ സംഖ്യ ആയതിനാൽ $\angle 3$ സംഖ്യകൾ ഒന്നു തന്നെയായിരിക്കും. ആകയാൽ ആകെ സാദ്ധ്യമായ വിഭേദങ്ങൾ $\frac{\angle 5}{\angle 3} = 5 \times 4 = 20$

ഏകാദി അഞ്ചുസ്ഥാനങ്ങളിൽ ചേരുന്നതിനാൽ

യോഗത്തിൽ വരുന്ന സംഖ്യ $= 88888 \times \frac{\angle 4}{\angle 3}$

$= 88888 \times \frac{\angle 5}{5 \times \angle 3}$

ഇങ്ങനെ 4 കൊണ്ടു വരുന്നത് $= 44444 \times \frac{\angle 5}{5 \times \angle 3}$

ഒരു 5 ഒരു സ്ഥാനത്തുറപ്പിച്ചാൽ

മറ്റു അക്കങ്ങളെക്കൊണ്ടുവരുന്ന ഭേദം $= \frac{\angle 4}{\angle 2} = \frac{\angle 5}{5\angle 3} .3$

ഇങ്ങനെ എല്ലാസ്ഥാനത്തും മറ്റു രണ്ടു അഞ്ചുകളെക്കൊണ്ട് വേറെ സംഖ്യകളുണ്ടാകുന്നില്ല. അന്യോന്യം സ്ഥാനം മാറി നിൽക്കുമെന്നേ വരികയുള്ളു. അതിനാൽ 5 നെ കൊണ്ടുവരുന്ന ഭേദം

$= 3 \times 55555 \times \frac{\angle 5}{5 \times \angle 3}$

എല്ലാ സംഖ്യകളുടേയും യോഗം $= (8 + 4 + 5 \times 3)\ 11111 \times \frac{\angle 5}{5 \times \angle 3}$

ഇവിടെ $\frac{\angle 5}{\angle 3}$ എന്നത് സംഖ്യാഭേദങ്ങളുടെ എണ്ണം സംഖ്യഭേദങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ അങ്കമിതി കൊണ്ട് ഹരിച്ച് അങ്കങ്ങളുടെ യോഗത്തെ പെരുക്കി സ്ഥാനാന്തരത്വം കൂട്ടിയാൽ സംഖ്യകളുടെ യോഗം കിട്ടും.

സംഖ്യായോഗം $= (8 + 4 + 5 + 5 + 5) \times 11111 \times \frac{20}{5}$

$= 27 \times 11111 \times 4 = \underline{1199988}$

ഇനി ആദ്യഭാഗത്തെ അക്കങ്ങൾ 2, 2, 1, 1

സംഖ്യാവിഭേദങ്ങൾ $= \frac{\angle 4}{\angle 2.\angle 2} = 6$

സംഖ്യായോഗം $= (2 + 2 + 1 + 1) \times 1111 \times \frac{6}{4} = \underline{9999}$

1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള വിഭിന്നങ്ങളായ അക്കങ്ങളെക്കൊണ്ട് 4 സ്ഥാനമുള്ള എത്ര സംഖ്യകളുണ്ടാക്കാം. ഒന്നാം സ്ഥാനം 9 വിധത്തിൽ വെക്കാം. ഓരോന്നിനും രണ്ടാം സ്ഥാനം 8 വിധം ഓരോന്നിനും മൂന്നാം സ്ഥാനം 7 വിധം. ഓരോന്നിനും നാലാം സ്ഥാനം 6 വിധം.

ആകെ വരുന്ന വിഭേദങ്ങൾ $= 9 \times 8 \times 7 \times 6$

ഒരു സ്ഥാനത്ത് വെച്ചത് വേറേ സ്ഥാനത്തും വെക്കാമെങ്കിൽ ആകെ വിഭേദങ്ങൾ = $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4$

സമാന്തര ശ്രേണിയും ഗുണോത്തര ശ്രേണിയും

സർവ്വധനം കാണുക

$a + (a + d)r + (a + 2d)r^2 + (a + 3d)r^3 \ldots\ldots\ldots\ldots$

ഓരോ പദവും രണ്ടുതരം ശ്രേണികൾ കലർന്നതാണ്.

n പദങ്ങളുടെ ആകെത്തുക Sn എന്നിരിക്കട്ടെ.

$Sn = a + (a + d)\ r + (a + 2d)\ r^2 + \text{——}\ [a + (n-1)d]r^{n-1}$

$rSn = ar + (a + d)r^2 + (a + 2d)r^3 + \text{—}\ [a + (n-1)d]r^n$

കിഴിക്കുമ്പോൾ

$(1 - r)\ Sn = a + dr + dr^2 + dr^3 \ldots\ldots + dr^{n-1} - [a + (n-1)d]r^n$

$= a + dr \times \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} - [a + (n-1)d]r^n$

$$Sn = \frac{a}{1-r} + \frac{dr(1-r^{n-1})}{(1-r)^2} - \frac{[a+(n-1)d]r^n}{1-r}$$

r 1 ൽ കുറവും n അനന്തവുമെങ്കിൽ r^n ശൂന്യത്തിന് തുല്യം

അപ്പോൾ $S = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}$

<u>സർവ്വധനം കാണുക :</u>

$1 + 5x + 9x^2 + 13x^3 + \ldots\ldots\ldots$ n പദങ്ങൾ

$$Sn = 1 + 5x + 9x^2 + 13x^3 + \ldots\ldots\ldots (4n-7)x^{n-2} + (4n-3)x^{n-1}$$

$$xSn = x + 5x^2 + 9x^3 + (4n-7)x^{n-1} + (4n-3)x^n$$

$$Sn(1-x) = 1 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + \ldots . 4x^{n-1} - (4n-3)x^n$$

$$= 1 + 4x\frac{1-x^{n-1}}{1-x} - (4n-3)x^n$$

$$Sn = \frac{1}{1-x} + \frac{4x-4x^n}{(1-x)^2} - \frac{4nx^n}{1-x} + \frac{3x^n}{1-x}$$

$$= \frac{1+3x^n-4nx^n}{1-x} + \frac{4x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-(4n-3)x^n}{1-x} + \frac{4x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}$$

$S = 1 + 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3^2} + 4\frac{1}{3^3} + \ldots\ldots\ldots$ അനന്തം

$$\frac{1}{3}S = 1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3^2} + 3\frac{1}{3^3} + 4\frac{1}{3^4} + \ldots\ldots\ldots$$

$$(1-\frac{1}{3})S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{2}{3}S = 1\frac{1}{1-1/3} = 3/2$$

$$\therefore S = \frac{3}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

$3 + (3+d)\frac{1}{4} + (3+2d)\frac{1}{4^2} + (3+3d)\frac{1}{4^3} + \ldots\ldots\ldots$ ഇത് അനന്തതയോളം എടുത്തതുക $= 4\frac{8}{9}$ എങ്കിൽ d യുടെ വില കാണുക ശ്രേണിയുടെ തുക S എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$S = 3 + (3+d)\frac{1}{4} + (3+2d)\frac{1}{4^2} + (3+3d)\frac{1}{4^3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{4}S = 3\frac{1}{4} + (3+d)\frac{1}{4^2} + (3+2d)\frac{1}{4^3} + (3+3d)\frac{1}{4^4} + \ldots\ldots\ldots$$

$$(1-\frac{1}{4})S = 3 + d\frac{1}{4} + d\frac{1}{4^2} + d\frac{1}{4^3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{3}{4}S = 3 + \frac{d}{4}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\ldots\ldots)$$

$$= 3 + \frac{d}{4}\frac{1}{1-1/4} = 3 + \frac{d}{4} \times \frac{4}{3} = 3 + \frac{d}{3}$$

$$S = \left(3 + \frac{d}{3}\right)\frac{4}{3}$$

എന്നാൽ $S = 4\frac{8}{9} = \frac{44}{9}$

$$\therefore \left(3 + \frac{d}{3}\right)\frac{4}{3} = \frac{44}{9}$$

$$3 + \frac{d}{3} = \frac{44}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{11}{3}$$

$$\therefore \frac{d}{3} = \frac{11}{3} - 3 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore d = \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

ചില സംഖ്യാ കസർത്തുകൾ

139	x	109	=	15151
152207	x	73	=	11111111
12345679	x	9	=	111111111
11011011	x	91	=	1002002001
14287143	x	7	=	100010001
142857143	x	7	=	1000000001
333333666667	X	33	=	11000011000011

ഈ ഗുണനഫലങ്ങൾ വലത്തോട്ടും ഇടത്തോട്ടും വായിച്ചാൽ ഒരു പോലിരിക്കും.

----- മഹാവീരർ

ഏകാങ്കഭിന്നങ്ങൾ UNIT FRACTIONS

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{2\text{x}3^{n-2}}$$

ഇതിലെ $n = 5$ എന്നെടുത്താൽ

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}$$

മറ്റൊരു തരത്തിലും 1 നെ ഏകാങ്കഭിന്നങ്ങളുടെ തുകയാക്കാം. അതിനുള്ള സമവാക്യം:

$$1 = \frac{1}{2\text{x}3\text{x}\frac{1}{2}} + \frac{1}{3\text{x}4\text{x}\frac{1}{2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2n-1)\text{x}2n\text{x}\frac{1}{2}} + \frac{1}{2n\text{x}\frac{1}{2}}$$

ഇതിലെ $n = 4$ എന്നെടുത്താൽ

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{4}$$

ഈ ഏകാങ്കഭിന്നങ്ങളുണ്ടാക്കുന്ന മേൽ സൂചിപ്പിച്ച ക്രിയയുടെ തന്ത്രം താഴെ വിവരിക്കുന്നു.

രൂപകാംശരാശി

ഒരു ഭിന്നിതത്തെ എണ്ണധാരി (NUMERATOR) 1 ആയും കൊണ്ടുള്ള പല ഭിന്നിതങ്ങളുടെ ആകെത്തുകയായി പുനഃസംവിധാനം ചെയ്യുന്നതിനാണ് രൂപകാംശരാശി യെന്ന് പറയുന്നത്.

1 എണ്ണധാരിയായിവരുന്ന n ഭിന്നിതങ്ങളുമെന്ന് കരുതുക. അതിൽ ആദ്യന്തങ്ങളിലുള്ള രണ്ടു പദങ്ങളൊഴികെ ബാക്കിയുള്ള n–2 ഭിന്നിതപദങ്ങളും ഒരു ഗുണോത്തരശ്രേണി (GEOMETRIC SERIES) യിലാവട്ടെ ആ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ പദവും സാധാരണ ഗുണവും (COMMON RATIO) 1/3 എന്ന് കരുതുക.

ആ ശ്രേണിയുടെ തുക

$$S_{n-2} = \frac{a(1 - r^{n-2})}{1 - r}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^{n-2}}\right)}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^{n-2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n-2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n-2}} = \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^{n-1}}\right]$$

ഈ ശ്രേണിയിൽ ആദ്യപദമായി ½ എന്ന ഭിന്നവും അന്ത്യപദമായി $\frac{1}{2/3} \frac{1}{3^{n-1}}$ എന്ന ഭിന്നവും ചേർക്കുക. ആ ശ്രേണിയുടെ ആകെത്തുക 1 ആയിരിക്കും. എല്ലാം പദഭിന്നിതങ്ങളുടേയും എണ്ണധാരിയും 1 ആയിരിക്കും.

n ന് 7 എന്ന വില കൽപ്പിച്ച് പരിശോധിക്കാം.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{2.3^5}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{486}$$

$$= \frac{243}{486} + \frac{162}{486} + \frac{54}{486} + \frac{18}{486} + \frac{6}{486} + \frac{2}{486} + \frac{1}{486}$$

$$= \frac{243 + 162 + 54 + 18 + 6 + 2 + 1}{486}$$

$$= \frac{486}{486} = 1$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} \quad \frac{1}{8}$$

(P — 1) കൊണ്ട് n നെ നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാൻ പറ്റുന്ന തരത്തിലുള്ള ഒരു സംഖ്യയാണ് P എങ്കിൽ

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{P \times n} + \frac{1}{P \times n/P-1}$$

ഉദാഹരണമായി n = 32; P = 9 എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.

$$\frac{1}{32} = \frac{1}{9 \times 32} + \frac{1}{(9 \times 32)/(9-1)}$$

$$= \frac{1}{288} + \frac{1}{(288/8)}$$

$$= \frac{1}{288} + \frac{8}{288} = \frac{9}{288} = \frac{1}{32}$$

ഈ ഫോർമുലയിൽ ഗണിതവിദ്യയൊന്നുമില്ല. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{Pn} + \frac{1}{\frac{Pn}{P-1}} = \frac{1}{Pn} + \frac{P-1}{Pn} = \frac{1+P-1}{Pn} = \frac{P}{Pn} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{2}{43} = \frac{84}{43x42} = \frac{43 + 21 + 14 + 6}{43x42}$$

$$= \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$$

മറ്റൊരുവിധം

$$\frac{2}{43} = \frac{48}{43x24} = \frac{43 + 4 + 1}{43x24}$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{258} + \frac{1}{1032}$$ ഇനിയും ഒരു വിധം

$$\frac{2}{43} = \frac{360}{43x180} = \frac{215+90+45+10}{43x180}$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{86} + \frac{1}{172} + \frac{1}{774}$$

$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + ...$ എന്ന ശ്രേണിയിലെ n പദങ്ങളുടെ ആകെത്തുക കാണുക.

n— ാമത്തെ പദം $= (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$

സർവ്വധനം $= 4.1^2 - 4.1 + 1$

$4.2^2 - 4.2 + 1$

$4.3^2 - 4.3 + 1$

$4.n^2 - 4.n + 1$

$4(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... n^2)$

$- 4(1 + 2 + 3 + ...n) + n$

$$= 4 x \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 x \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n(n+1) + n$$

$$= \frac{n}{3} [2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3]$$

$$= \frac{n}{3} (4n^2 + 6n + 2 - 6n - 6 + 3)$$

$$= \frac{n}{3} (4n^2 - 1)$$

ഒരു ശ്രേണിയിലെ n—ാമത്തെ പദം n(n+1) (n+4) എങ്കിൽ ആ ശ്രേണിയിലെ n പദങ്ങളുടെ സർവ്വധനം കാണുക.

n—ാമത്തെ പദം $= n(n+1)(n+4)$

$= n^3+5n^2+4n$

സർവ്വധനം $= 1^3 + 5.1^2 + 4.1$

$2^3 + 5.2^2 + 4.2$

$3^3 + 5.3^2 + 4.3$

x x x x

$n^3 + 5n^2 + 4n$

$$= [\frac{n(n+1)}{2}]^2 + \frac{5n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n(n+1)+10(2n+1)+24]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12} (3n^2 + 23n + 34)$$

1 2

3 4 5 6

7 8 9 10 11 12

13 14 15 16 17 18 19 20

ഇതിലെ n—ാമത്തെ വരിയിലെ അക്കങ്ങളുടെ ആകെത്തുക കാണുക.

n - ാമത്തെ വരിയിലെ അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണം = 2n

n - ാമത്തെ വരിയടക്കമുള്ള എല്ലാവരികളിലും കൂടി ആകെയുള്ള അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണം.

$$= 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots + 2n$$

$$= 2(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots + n)$$

$$= \frac{2(n+1)n}{2} = n(n+1)$$

ആവശ്യപ്പെട്ട തുക = n വരിയിലെ തുക — (n − 1) വരിയിലെ തുക

n അക്കങ്ങളുടെ ആകെത്തുക Sn ആണെങ്കിൽ ആവശ്യപ്പെട്ട തുക

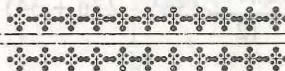
$$= S_{n(n+1)} - S_{(n-1)n}$$

$$= \frac{n(n+1)\{n(n+1)+1\}}{2} - \frac{(n-1)n\{(n-1)n+1\}}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)\{n^2+n+1) - n(n-1)(n^2 - n + 1)}{2}$$

$$= \frac{n}{2} (n^3 + 2n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n^2 - 2n + 1)$$

$$= \frac{n}{2} (4n^2 + 2) = n(2n^2 + 1)$$



ശുദ്ധിപത്രം

പേജ്	വരി	തെറ്റ്	ശരി
5	34	ച	N
15	36	പരിധി വ്യാസം	പരിധി വ്യാസം
		പരിധി π	പരിധി π
16	33	സ്താ	സ്തഗാ
17	13	ȝ	π
18	12	ധ=7	ധ=9
19	1	സ്ഥാപിത്യ	സ്ഥാപത്യ
,,	17	ഗുൽബ	ശുൽബ
,,	19	ഗണിതഞ്ജൻ ȝ	ഗണിതഞ്ജൻ π
20	16	ആ വരി ഇങ്ങനെ $=\frac{1}{2}$ (വ്യാ-$\sqrt{\text{(വ്യാ+ജ്യാ)(വ്യാ-ജ്യാ)}}$) = ശരം	
22	3	(ജ്യാ/2)^2/ശരം പ ശരം	(ജ്യാ/2)^2/ശരം
,,	5	ശരം + ശരം	(ജ്യാ/2)^2 / ശരം +ശരം
,,	7	ആ വരി ഇങ്ങനെ വേണം വ്യാസം = (ജ്യാ/2)^2 / ശരം +ശരം	
25	25	CB ചാപത്തിന്മേലുള്ള	C. ആ ചാപത്തിന്മേലുള്ള
,,	36	ഇ എന്ന	C എന്ന
,,	38	ഇ യും അ യും	Cയും A യും
,,	40	അ യുമായി	B യുമായി
30	27	$\sqrt{5}\,\frac{r}{2}$	$= \sqrt{5}\,\frac{r}{2}$
,,	36	ആ വരി ഇങ്ങനെ	$5r^2\sqrt{5}\,r/8$. $AB=2BC=\frac{2\sqrt{5r^2\sqrt{5r^2}}}{8}$
31	7	ഇഷ്ട	ഇഷു
,,	40	84853	84863

32	22	1500 D	1500 AD
„	28	ABC ഋതു	ACB ഋജു
33	35	$[\frac{1}{4} (\frac{1}{2} + a^2/m)]^2$	$[\frac{1}{2} (a^2/m+m)]^2$
37	3	വർദ്ധേ	ർവദ്ധേ
„	4	യോഹേന	യോഗേന
„	16	ആ വരി ഇങ്ങനെ	ഖ=ഭൂ.ല/ഗ=ക.ഗ/ക+ഖ(ഭൂ/ഗ= $\frac{ക}{ക+ഗ}$
„	17	ആ വരി ഇങ്ങനെ	ഘ=ഭൂ.ല/ക=ക.ഗ/ക+ഗ(ഭൂ/ക=ഗ/ക+ഗ
40	9	ആ വരി ഇങ്ങനെ	$\frac{2\sqrt{3}r^2 - \pi r^2}{2} = r^2 (\sqrt{3}-\pi)$
41	34	$ഗ^2$ – സം (ഗ)+ഗ	= $ഗ^2$–സം (ഗ)+ഗ
42	8	ആ വരി താഴെയുടെ ബ്രായ്ക്കറ്റിൽ ഉൾപ്പെടണം	
„	24	(ഗ2+2+3ഗ+2)	(ഗ2+3 ഗ+2)
„	28	ആദ്യസങ്കലനം	= ആദ്യസങ്കലനം
44	10	ആദ്യസങ്കലനം	= ആദ്യസങ്കലനം
45	6	ക്ഷന്തമന്ത്യം	ക്ഷയാന്തമന്ത്യം



ഭാരതീയ ഗണിത സൂചിക

ഈ ഗ്രന്ഥം ഗണിതശാസ്ത്രം പഠിക്കുവാനുള്ളതല്ല. പഠിച്ചവർക്ക് അല്പം കൂടുതൽ മനസ്സിലാക്കുവാനും ആസ്വദിച്ചാനന്ദിക്കാനുമുള്ളതാണ്. ആംഗലേയ ഭാഷയിൽ ഗണിതശാസ്ത്രം പഠിച്ചവർക്ക് എല്ലാവർക്കും ഭാരതത്തിൽ സംസ്കൃതത്തിൽ എന്തെല്ലാം കിടപ്പുണ്ടെന്ന് അറിഞ്ഞെന്നു വരില്ല. പൗരാണികരായ ഗണിതശാസ്ത്ര പണ്ഡിതരുടെ പ്രാഗത്ഭ്യത്തെ കുറിച്ച് അല്പമെങ്കിലും മനസ്സിലാക്കി അഭിമാന പുളകിതരാകുവാൻ ഈ പുസ്തകം വായനക്കാരെ സഹായിക്കുന്നു. 'വിസ്തൃതഗോള ശാസ്ത്രം' എന്ന വൈജ്ഞാനീയ ഗ്രന്ഥത്തിനുശേഷം വി.വി.അബ്ദുല്ല സാഹിബിന്റെ മറ്റൊരു പ്രൗഢഗ്രന്ഥം.

Printed at CHARUTHA Perinjanam 845589